SVOLGIMENTI PROVE SCRITTE

ANALISI 1 del 20/6/2016

A_1

COMPITO A

1) Omogenea associata:

$$y'' + 2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \; ; \; \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{-2x} + C_2$$

Equazione non omogenea: principio di sovrapposizione. Poiché $\lambda = 0$ è radice del polinomio caratteristico $\Rightarrow$

$$y_p(x) = Ae^x + x(ax^2 + bx + c)$$

$$y_p'(x) = Ae^x + (3ax^2 + 2bx + c)$$

$$y_p''(x) = Ae^x + (6ax + 2b)$$

$$\Rightarrow \quad Ae^x + 6ax + 2b + 2Ae^x + 6ax^2 + 4bx + 2c = e^x + x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ 6a = 1 \\ 6a + 4b = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} ; \; c = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 + \frac{1}{3} e^{x} + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x.$$

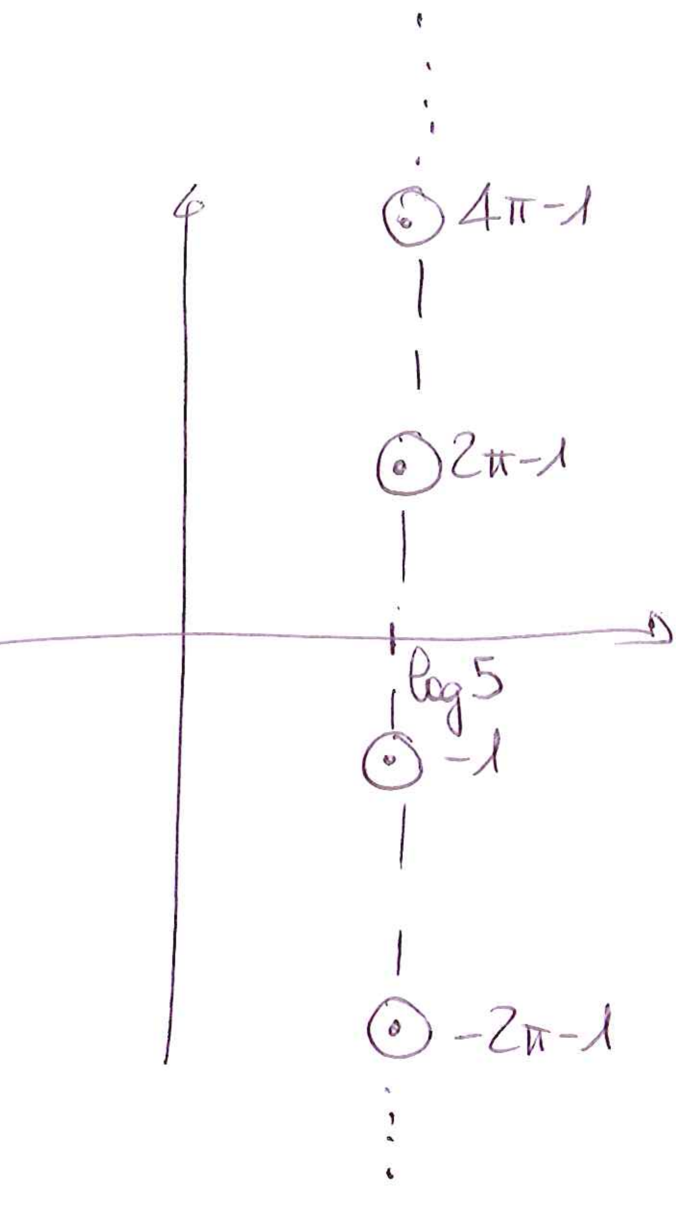
Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3} e^{x} = +\infty$ $\quad$ A2

non esistono soluzioni limitate

2) $$e^{i} = 5 e^{-x-iy} = 5 e^{-x} \cdot e^{-iy}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 5 e^{-x} \\ 1 = -y + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x} = 5 \\ y = -1 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \log 5 \\ y = 2k\pi - 1, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$3)\quad a_n = \frac{\left[\sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}\right]}{\left[\sqrt{n^2-n} - n + \frac{1}{2}\right]} \cdot \frac{\left[\sqrt{n^2+n} + n + \frac{1}{2}\right]}{\left[\sqrt{n^2+n} + n + \frac{1}{2}\right]} \cdot \frac{\left[\sqrt{n^2-n} + n - \frac{1}{2}\right]}{\left[\sqrt{n^2-n} + n - \frac{1}{2}\right]}$$

$$= \left[\frac{(n^2+n) - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{(n^2-n) - \left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{n^2-n} + n - \frac{1}{2}}{\sqrt{n^2+n} + n + \frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{\cancel{-\frac{1}{4}}}{\cancel{-\frac{1}{4}}} \cdot \left[\frac{\sqrt{n^2-n} + n - \frac{1}{2}}{\sqrt{n^2+n} + n + \frac{1}{2}}\right]$$

$$\sim \frac{2n}{2n} \longrightarrow 1$$

Portanto $\sum a_n$ diverge.

4) $f(x) = \log\left[(1+x)^2\right] = 2\log(|1+x|)$ A_4

$D = \{x \neq -1\}$.

$f(x) = 0 \iff |1+x| = 1$

$\iff x_1 = 0 \,;\; x_2 = -2$

$f(x) > 0 \iff |1+x| > 1 \iff$

$x < -2 \,;\; x > 0$

$\left[f(0) = 0 \right]$

f è continua e derivabile in tutto D, perchè composizione di funzioni derivabili.

$\lim_{x \to -1} f(x) = \cancel{\lim_{x \to -1}}\, 2\log(0^+) = -\infty$

AS. VERTICALE $x = -1$.

~~Non ho asintoti~~

MONOTONIA: $f'(x) = \dfrac{2}{1+x} > 0$

$\iff x > -1$.

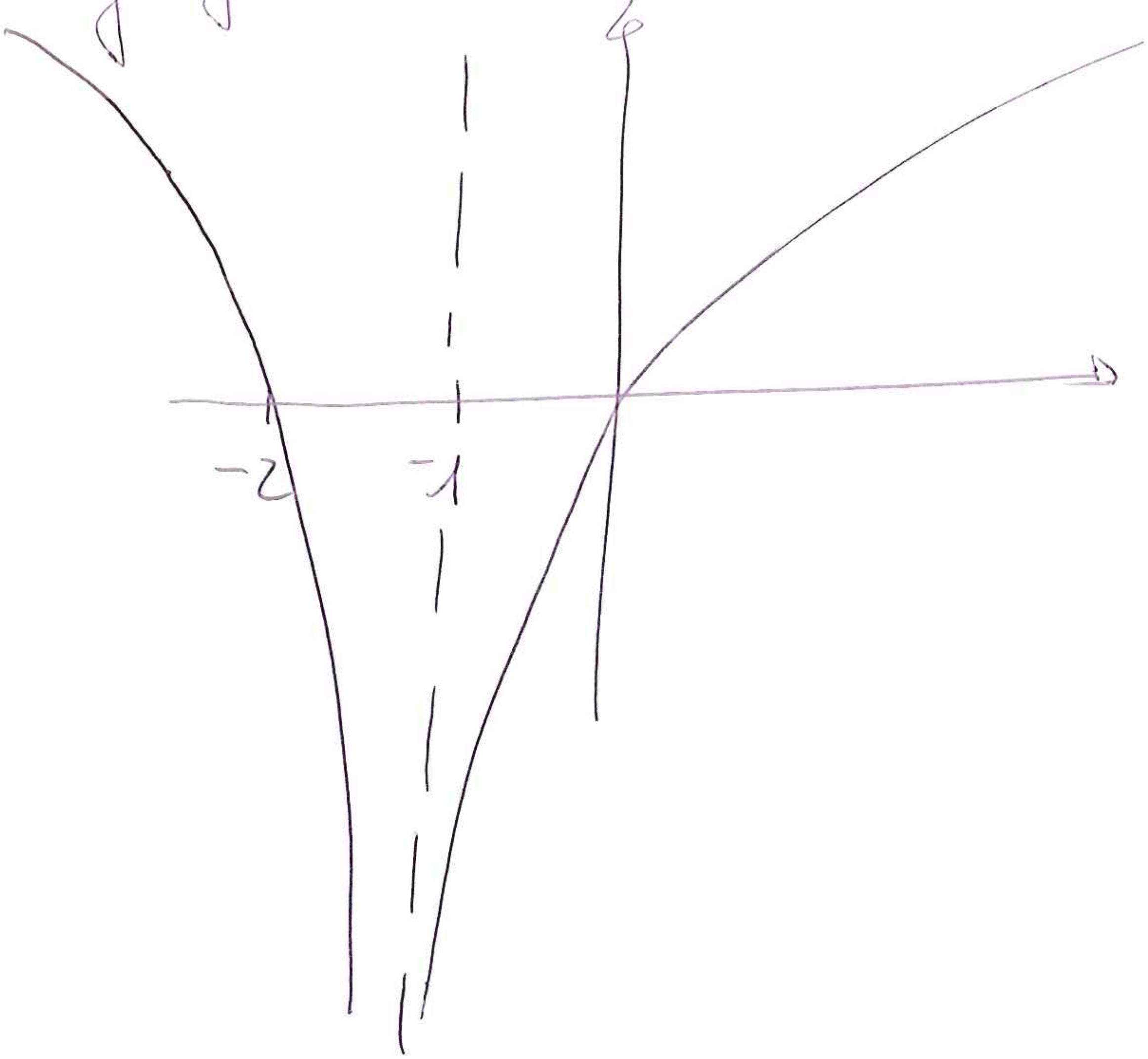
f decresce in $(-\infty, -1)$; cresce in $(-1, +\infty)$.

(A5)

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Non esistono asintoti obliqui, perché il logaritmo è sublineare.

Grafico (non richiesto):



5) $f(x) > 0 \iff \sqrt{x} > \sqrt{x-2}$

vero $\forall x \in [2, +\infty)$.

(f è comunque definita $\forall x \geq 2$)

$$f(x) = \frac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)}{x^2\left[\cancel{x}-\cancel{x}+2\right]} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{x^2}$$ A6

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x^2} = \frac{2}{x^{3/2}}$$

che è integrabile a $+\infty$.

Sfruttando il fatto che

$$\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}} = \sqrt{x}+\sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \left[\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right]dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[8+\sqrt{8}-\sqrt{8}\right] = \frac{16}{3}.$$