CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - a.a. 2001/2002
prova scritta di ANALISI MATEMATICA II (1° modulo - 28 gennaio 2002)

COMPITO A

Gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2001/2002 devono svolgere gli esercizi 1a, 2, 5, 6, 7;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2000/2001 devono svolgere gli esercizi 1a, 2, 5, 6 , 7;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 1999/2000 devono svolgere gli esercizi 1a, 2, 4, 6, 7;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma di un a.a. $\leq$ 1998/1999 devono svolgere gli esercizi 1b, 2, 3, 5, 6.

1) Dato il dominio del piano

$$D = \left\{(x,y) \in I\!R^2 \mid 2x \ \leq x^2 + y^2 \ \leq \ 4x\right\} \ ,$$

e supponendo che la densità sia costante,
a) (N.O.) calcolare l'area e le coordinate del baricentro di D;
b) (V.O.) calcolare il volume e le coordinate del baricentro del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse delle x di un angolo $\alpha = \pi$.

$$\mathbf{a)} \quad \text{Area} \ = \ 3\pi \quad ; \quad x_B \ = \ \frac{7}{3} \quad ; \quad y_B \ = \ 0 \ .$$

$$\mathbf{b)} \quad \text{Vol} \ = \ \frac{28}{3}\pi \quad ; \quad y_B \ = \ z_B \ = \ 0 \quad ; \quad x_B \ = \ \frac{15}{7} \ .$$

---

2) Studiare integrabilità e sommabilità, nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$, della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|^\alpha} & \text{if } x \ \in \ [-\frac{\pi}{2}, 0[\\ 0 & \text{if } x = 0 \\ \frac{\sin^\beta x}{x} & \text{if } x \ \in \ ]0, \pi] \end{cases}$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in I\!R$.

$\alpha < 2$	;	$\beta > 0$	sommabile;
$\alpha \geq 2$	;	$\beta \leq 0$	non integrabile;
$\alpha < 2$	;	$\beta \leq 0$	integrabile ma non sommabile;
$\alpha \geq 2$	;	$\beta > 0$	integrabile ma non sommabile.

---

3) Determinare una funzione $\mu(x)$ tale che la funzione

$$u(x,y) = \mu(x) x^5$$

sia, nel semipiano delle x positive, la parte reale, <u>non costante</u>, di una funzione olomorfa $f(z)$. Determinare anche $f(z)$.

$$\mu(x) \ = \ \frac{1}{x^4} \quad ; \quad f(z) \ = \ z \ .$$

---

4) Calcolare, tramite il Teorema dei Residui,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^2+3}{x^4+2x^2+1}\ dx\ .$$

$$\frac{7}{2}\pi$$

---

5) Sfruttando il Teorema della Divergenza, calcolare

$$\int_{+\partial T} (x^2+y^2)\ dx\ \ +\ \ (1+x^2+y^2)\ dy$$

dove $+\partial T$ è la frontiera, percorsa in verso positivo, del dominio del piano ottenuto intersecando il semipiano chiuso delle y positive e il dominio D, scritto in coordinate polari,

$$D = \big\{(\rho,\theta) \in I\!\!R^2 \quad | \quad \rho\ \le\ \theta \quad ; \quad \theta \in [0,\pi]\big\}\ .$$

$$\frac{2}{3}\left(-\pi^3 - 3\pi^2 + 6\pi + 12\right)$$

---

6) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y" + \frac{1}{x}\ y'\ =\ \frac{1}{x^2}$$

che soddisfino il seguente problema ai bordi

$$y(1) = 1 \qquad ; \qquad y(e) = 0$$

$$y(x)\ =\ \frac{\log^2 x}{2} - \frac{3}{2}\log x + 1$$

---

7) Costruire la serie di Fourier della funzione 2π-periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} 2x+7\pi & \text{se} \quad x \in (-3\pi,-2\pi] \\ \\ -2x-\pi & \text{se} \quad x \in (-2\pi,-\pi] \end{cases}$$

e stabilire il valore della somma della serie al variare di $x \in I\!\!R$.

FAC.: in quali intervalli la serie converge totalmente?

$$f(x)\ \sim\ 2\pi + \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\ \cos[(2m+1)x]\ ;$$

$S(x)\ =\ f(x) \qquad \forall x \in I\!\!R \qquad ; \qquad$ convergenza totale in $I\!\!R$.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - a.a. 2001/2002
prova scritta di ANALISI MATEMATICA II (1° modulo - 28 gennaio 2002)

COMPITO B

Gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2001/2002 devono svolgere gli esercizi 1a, 2, 5, 6, 7;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2000/2001 devono svolgere gli esercizi 1a, 2, 5, 6 , 7;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 1999/2000 devono svolgere gli esercizi 1a, 2, 4, 6, 7;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma di un a.a. $\leq$ 1998/1999 devono svolgere gli esercizi 1b, 2, 3, 5, 6.

1) Dato il dominio del piano

$$D = \left\{(x,y) \in I\!R^2 \mid y \ \leq x^2 + y^2 \ \leq \ 2y\right\} \ ,$$

e supponendo che la densità sia costante,
a) (N.O.) calcolare l'area e le coordinate del baricentro di D;
b) (V.O.) calcolare il volume e le coordinate del baricentro del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse delle y di un angolo $\alpha = \pi$.

$$\textbf{a)} \quad \text{Area} \ = \ \frac{3}{4}\pi \quad ; \quad x_B \ = \ 0 \quad ; \quad y_B \ = \ \frac{7}{6} \ .$$

$$\textbf{b)} \quad \text{Vol} \ = \ \pi \quad ; \quad x_B \ = \ z_B \ = \ 0 \quad ; \quad y_B \ = \ \frac{5}{4} \ .$$

---

2) Studiare integrabilità e sommabilità , nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$, della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{|x|^\alpha} & \text{if } x \ \in \ [-\frac{\pi}{4}, 0[\\ 0 & \text{if } x = 0 \\ \frac{\log^\beta(1+x)}{x} & \text{if } x \ \in \ ]0,\pi] \end{cases}$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in I\!R$.

$\alpha \ < \ 2$	; $\beta \ > \ 0$	sommabile;
$\alpha \ \geq \ 2$	; $\beta \ \leq \ 0$	non integrabile;
$\alpha \ < \ 2$	; $\beta \ \leq \ 0$	integrabile ma non sommabile;
$\alpha \ \geq \ 2$	; $\beta \ > \ 0$	integrabile ma non sommabile.

---

3) Determinare una funzione $\mu(y)$ tale che la funzione

$$v(x,y) = \mu(y)y^5$$

sia, nel semipiano delle y positive, la parte immaginaria, <u>non costante</u>, di una funzione olomorfa $f(z)$. Determinare anche $f(z)$.

$$\mu(y) \ = \ \frac{1}{y^4} \quad ; \quad f(z) \ = \ z \ .$$

---

4) Calcolare, tramite il Teorema dei Residui,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^2+3}{x^4+2x^2+1}\, dx \ .$$

$$\frac{7}{2}\pi$$

---

5) Sfruttando il Teorema della Divergenza, calcolare

$$\int_{+\partial T} (1+x^2+y^2)\ dx \ + \ (x^2+y^2)\ dy$$

dove $+\partial T$ è la frontiera, percorsa in verso positivo, del dominio del piano ottenuto intersecando il semipiano chiuso delle y positive e il dominio D, scritto in coordinate polari,

$$D = \left\{(\rho,\theta) \in I\!R^2 \quad | \quad \rho \ \leq \ e^{\theta} \quad ; \quad \theta \in [0,\pi]\right\} \ .$$

$$-\frac{4}{15}\left(e^{3\pi}+1\right) \ .$$

---

6) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y" - \frac{1}{x}\, y' \ = \ x^2$$

che soddisfino il seguente problema ai bordi

$$y(2)=1 \qquad ; \qquad y(1)=0$$

$$y(x) \ = \ \frac{x^4}{8} - \frac{7}{24}x^2 + \frac{1}{6} \ .$$

---

7) Costruire la serie di Fourier della funzione 2π-periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} -x+4\pi & \text{se} \quad x \in (\pi, 2\pi] \\ x & \text{se} \quad x \in (2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

e stabilire il valore della somma della serie al variare di $x \in I\!R$.

FAC.: in quali intervalli la serie converge totalmente?

$$f(x) \ \sim \ \frac{5}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\ \cos[(2m+1)x] \ ;$$

$S(x) \ = \ f(x) \qquad \forall x \in I\!R \qquad ; \qquad$ convergenza totale in $I\!R$.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - a.a. 2001/2002

prova scritta di ANALISI MATEMATICA II (1° modulo - 22 febbraio 2002)

COMPITO A

Gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2001/2002 devono svolgere gli esercizi 3, 4, 5, 6, 7; tutti gli altri studenti devono svolgere 5 esercizi a scelta fra i 7 proposti.

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\log(x^3)]^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

determinarne la somma e gli insiemi di convergenza assoluta, puntuale, uniforme e totale.

---

convergenza assoluta e puntuale in $]0,+\infty[$;
convergenza uniforme e totale in ogni intervallo del tipo $[a,b]$; $0 < a < b < +\infty$;

$$S(x) \ = \ \cosh\left[\log\left(x^3\right)\right] - 1 \ = \ \frac{\left(x^3-1\right)^2}{2} \ .$$

---

2) Studiare gli insiemi di esistenza, di continuità e di olomorfia della funzione

$$f(z) \ = \ \log(z^2 + iz + 2) \quad ; \quad z \in \mathbf{C} \ .$$

$$I_{def} \ = \ \mathbf{C} - \{z = i \ ; \ z = -2i\} \ ;$$

$$I_{cont} \ = \ I_{ol} \ = \ \mathbf{C} - \left\{ \begin{cases} x = 0 \\ y \le -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y \ge 1 \end{cases} \right\} \ .$$

---

3) Determinare l'insieme di definizione e quello di esattezza della forma differenziale

$$\phi(x,y) \ = \ \left[\arctan(x) + x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right] \ dx \ + \ \left[\arctan(y) + y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right] \ dy \ .$$

FAC.: determinare, nell'insieme di esattezza, una primitiva.

$$I_{def} \ = \ I_{es} \ = \ I\!R^2 - \{(0,0)\} \ ;$$

$$F(x,y) \ = \ x \arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + y \arctan y - \frac{1}{2}\log\left(1+y^2\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C \ .$$

---

4) Stabilire se il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' \ = \ (\log x) \ \sqrt{y-1} \\ y(1) \ = \ 1 \end{cases}$$

ammette una sola soluzione. Determinare inoltre tutte le soluzioni del problema.

$$y_1 \ \equiv \ 1 \qquad ; \qquad y_2 \ = \ 1 + \frac{1}{4}\ [x \log x - x + 1]^2 \ .$$

---

5) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva grafico della funzione

$$\phi(x) \;=\; \int_x^{x^2} \log(1+xy^2)\; dy$$

nel punto (0,0).

$$y \;=\; 0 \;.$$

---

6) Determinare i valori $\alpha \in I\!R$ tali che la funzione

$$f(x) \;=\; x^\alpha \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \;,$$

nell'intervallo $[0,+\infty)$, risulti
a) sommabile;
b) integrabile.
FAC.: calcolare esplicitamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\; dx \;.$$

---

sommabile per $-1 < \alpha < 0$;
integrabile $\forall \alpha \in I\!R$;

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\; dx \;=\; +\infty$$

---

7) Data la funzione 2π-periodica tale che

$$f(x) = x^2 \qquad ; \quad x \in [-\pi,\pi] \;,$$

a) stabilire il valore della somma della sua serie di Fourier, al variare di $x \in I\!R$;
b) determinare l'insieme di convergenza totale della serie di Fourier;
c) calcolare esplicitamente la serie di Fourier;
FAC.: dimostrare la convergenza totale direttamente dalla forma della serie.

$$f(x) \;=\; \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\,(-1)^k\; \cos(kx) \qquad \forall x \in I\!R \;;$$

convergenza totale in $I\!R$.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - a.a. 2001/2002
prova scritta di ANALISI MATEMATICA II (1° modulo - 22 febbraio 2002)

COMPITO B

Gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2001/2002 devono svolgere gli esercizi 3, 4, 5, 6, 7; tutti gli altri studenti devono svolgere 5 esercizi a scelta fra i 7 proposti.

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\log(\sqrt{x})]^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

determinarne la somma e gli insiemi di convergenza assoluta, puntuale, uniforme e totale.

---

convergenza assoluta e puntuale in $]0, +\infty[$;
convergenza uniforme e totale in ogni intervallo del tipo $[a, b]$; $0 < a < b < +\infty$;

$$S(x) \; = \; \sinh\left[\log\left(\sqrt{x}\right)\right] - \log\sqrt{x} \; = \; \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}} - \log\sqrt{x} \; .$$

---

2) Studiare gli insiemi di esistenza, di continuità e di olomorfia della funzione

$$f(z) \; = \; \log(z^2 - 2iz + 1) \quad ; \quad z \in \mathbf{C} \; .$$

$$I_{def} \; = \; \mathbf{C} - \left\{ z = i(1 \pm \sqrt{2}) \right\} \; ;$$

$$I_{cont} \; = \; I_{ol} \; = \; \mathbf{C} - \left\{ \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 1 - \sqrt{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases} \right\} \; .$$

---

3) Determinare l'insieme di definizione e quello di esattezza della forma differenziale

$$\phi(x,y) \; = \; \left[\log(1+x^2) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] \, dx \; + \; \left[\log(1+y^2) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] \, dy \; .$$

FAC.: determinare, nell'insieme di esattezza, una primitiva.

$$I_{def} \; = \; I_{es} \; = \; I\!R^2 - \{(0,0)\} \; ;$$

$$F(x,y) \; = \; \sqrt{x^2+y^2} + x\log\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan x + y\log\left(1+y^2\right) - 2y + 2\arctan y + C \; .$$

---

4) Stabilire se il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' \; = \; xe^x \, \sqrt{y-2} \\ y(0) \; = \; 2 \end{cases}$$

ammette una sola soluzione. Determinare inoltre tutte le soluzioni del problema.

$$y_1 \; \equiv \; 2 \qquad ; \qquad y_2 \; = \; 2 + \frac{1}{4} \, \left[(x-1)e^x + 1\right]^2 \; .$$

---

5) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva grafico della funzione

$$\phi(x) \;=\; \int_x^{x^2} e^{xy^2}\; dy$$

nel punto (0,0).

$$y \;=\; -x$$

---

6) Determinare i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x^2}\arctan\left(x^{\alpha}\right) \;,$$

nell'intervallo $[0, +\infty)$, risulti
a) sommabile;
b) integrabile.
FAC.: calcolare esplicitamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \;.$$

---

sommabile per $\alpha > 1$;
integrabile $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\; dx \;=\; +\infty$$

---

7)

Data la funzione 2π-periodica tale che

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \qquad ; \quad x \in [-\pi, \pi] \;,$$

a) stabilire il valore della somma della sua serie di Fourier, al variare di $x \in \mathbb{R}$;
b) determinare l'insieme di convergenza totale della serie di Fourier;
c) calcolare esplicitamente la serie di Fourier;
FAC.: dimostrare la convergenza totale direttamente dalla forma della serie.

$$f(x) \;=\; \frac{2\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\,(-1)^k\;\cos(kx) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\;;$$

convergenza totale in $\mathbb{R}$.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - a.a. 2000/2001
prova scritta di ANALISI MATEMATICA II (1° modulo - 8 aprile 2002)
COMPITO A

Gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2001/2002 devono svolgere **4** esercizi fra 2, 3, 4, 7, 8;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. $\leq$ 2000/2001 devono svolgere **4** esercizi fra 1, 2, 3, 4, 5, 6 (**tra di essi deve esserci obbligatoriamente il 5 o il 6**).

1) Determinare il campo di olomorfia della funzione

$$\frac{\log(iz+2)}{z-2} \, .$$

$$I_{def} \;=\; \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 2 \; ; \; z \neq 2i\} \; ;$$
$$I_{ol} \;=\; \mathbf{C} - \left\{ \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 2 \end{cases} \cup \; \{z = 2\} \right\} \, .$$

---

2) Determinare $m < 0$ in modo tale che il baricentro della regione piana racchiusa tra la parabola $y = -x^2 + 3x$ e la retta $y = mx$ appartenga all'asse x.

$$m \;=\; -\frac{3}{4} \, .$$

---

3) Calcolare l'integrale
$$\int_\gamma X \; dx + Y \; dy$$
essendo $X \; dx + Y \; dy = x^2 y \; dx + 3xy \; dy$ e γ la curva di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\frac{91}{12} \, .$$

---

4) Determinare una equazione differenziale lineare che ammetta come soluzioni le funzioni

$$y_1 = e^{2x+5} \sin 2x \qquad ; \qquad y_2 = e^{2x+1} \cos 2x$$

$$y'' - 4y' + 8y \;=\; 0 \, .$$

---

5) Determinare l'insieme di convergenza puntuale E e la funzione limite della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{3x^2n^2}{n^3 + 2|\sin x|}$$

e dire se in E la convergenza è uniforme.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ = \ f(x) \ \equiv \ 0 \qquad \forall x \in I\!R \ .$$

convergenza uniforme in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

---

6) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme, assoluta e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ \frac{x^{2n}}{(n!)^2 \ 2^{2n}} \ .$$

---

convergenza assoluta e puntuale in $I\!R$;
convergenza uniforme e totale in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

---

7) Stabilire sommabilità e integrabilità nell'intervallo $[3, +\infty[$ della funzione

$$f(x) \ = \ \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3(x-3)^2} \ .$$

In caso affermativo, calcolare

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3(x-3)^2} \ dx \ .$$

FAC.: cosa si può dire della sommabilità e della integrabilità di $f(x)$ nell'intervallo $[2, +\infty[$?

---

sommabile e integrabile;

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3(x-3)^2} \ dx \ = \ 1 \ .$$

integrabile ma non sommabile in $[2, +\infty[$.

---

8) Determinare la serie di Fourier della funzione 2π - periodica, tale che $f(x) \ = \ \cos(\frac{x}{2})$ in $[0, 2\pi[$, stabilendone l'insieme di convergenza puntuale e la somma.

$$f(x) \ \sim \ \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)} \ \sin(kx) \ ;$$

$$\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)} \ \sin(kx) \ = \ \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ 0 & \text{if } x \neq 2k\pi \end{cases} \ .$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - a.a. 2000/2001
prova scritta di ANALISI MATEMATICA II (1° modulo - 8 aprile 2002)
COMPITO B

Gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. 2001/2002 devono svolgere **4** esercizi fra 2, 3, 4, 7, 8;
gli studenti che devono sostenere l'esame sul programma dell'a.a. $\leq$ 2000/2001 devono svolgere **4** esercizi fra 1, 2, 3, 4, 5, 6 (**tra di essi deve esserci obbligatoriamente il 5 o il 6**).

1) Determinare il campo di olomorfia della funzione

$$\frac{\log(iz+1)}{z-1} \ .$$

$$I_{def} \ = \ \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 1 \ ; \ z \neq i\} \ ;$$
$$I_{ol} \ = \ \mathbf{C} - \left\{ \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 1 \end{cases} \cup \ \{z = 1\} \right\} \ .$$

---

2) Determinare $m < 0$ in modo tale che il baricentro della regione piana racchiusa tra la parabola $y = -x^2+2x$ e la retta $y = mx$ appartenga all'asse x.

$$m \ = \ -\frac{1}{2} \ .$$

---

3) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma X \ dx + Y \ dy$$

essendo $X \ dx + Y \ dy = x^2y \ dx + 2xy \ dy$ e γ la curva di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\frac{37}{12} \ .$$

---

4) Determinare una equazione differenziale lineare che ammetta come soluzioni le funzioni

$$y_1 = e^{3x+2} \sin x \qquad ; \qquad y_2 = e^{3x+5} \cos x$$

$$y'' - 6y' + 10y \ = \ 0 \ .$$

---

5) Determinare l'insieme di convergenza puntuale E e la funzione limite della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2 n^2}{n^3 + |\sin x|}$$

e dire se in E la convergenza è uniforme.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; f(x) \;\equiv\; 0 \qquad \forall x \in I\!R\ .$$

convergenza uniforme in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

---

6) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme, assoluta e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ \frac{x^{2n}}{(n!)^2 \ 2^{2n}} \ .$$

---

convergenza assoluta e puntuale in $I\!R$;
convergenza uniforme e totale in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

---

7) Stabilire sommabilità e integrabilità nell'intervallo $[3, +\infty[$ della funzione

$$f(x) \;=\; \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3(x-3)^2} \ .$$

In caso affermativo, calcolare

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3(x-3)^2} \ dx \ .$$

FAC.: cosa si può dire della sommabilità e della integrabilità di $f(x)$ nell'intervallo $[2, +\infty[$?

---

sommabile e integrabile;

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3(x-3)^2} \ dx \;=\; 1 \ .$$

integrabile ma non sommabile in $[2, +\infty[$.

---

8) Determinare la serie di Fourier della funzione 2π - periodica, tale che $f(x) \;=\; |\sin(\frac{x}{2})|$ in $[-\pi, \pi]$, stabilendone l'insieme di convergenza puntuale e la somma.

$$f(x) \;=\; \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)} \ \cos(kx) \ .$$
