SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 20/10/2017

1) $$f(x) = \frac{2(1-|x|)+2(1+|x|)}{(1+|x|)(1-|x|)} = \frac{4}{(1-|x|^2)} = \frac{4}{1-x^2}$$

$$D = \{x \neq \pm 1\}$$

Funzione pari. Non si annulla mai

$$f(x) > 0 \iff 1-x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$$

ASINTOTI:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \qquad \text{AS. OR. DX e SX} \quad y = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{-4}{0^+ \cdot 2} = -\infty$$

$$= \lim_{x \to -1^-} f(x) \quad \text{(per parità)}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{-4}{0^- \cdot 2} = +\infty = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

AS. VERT.: $x = \pm 1$.

$$f'(x)=\frac{-4}{(1-x^2)^2}\cdot(-2x)=\frac{8x}{(1-x^2)^2}>0$$

$$\Longleftrightarrow x>0$$

f decresce in $(-\infty,-1)$ e in $(-1,0)$;

cresce in $(0,1)$ e in $(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ $x=0$ punto di MIN. REL.

$$f(0)=4$$

$\nexists$ MAX. o MIN. ASSOLUTI, a causa degli asintoti verticali.

$$f''(x)=8\left[\frac{(1-x^2)^2-2x(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}\right]$$

$$=8\left[\frac{1-x^2+4x^2}{(1-x^2)^3}\right]=8\left[\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}\right]>0$$

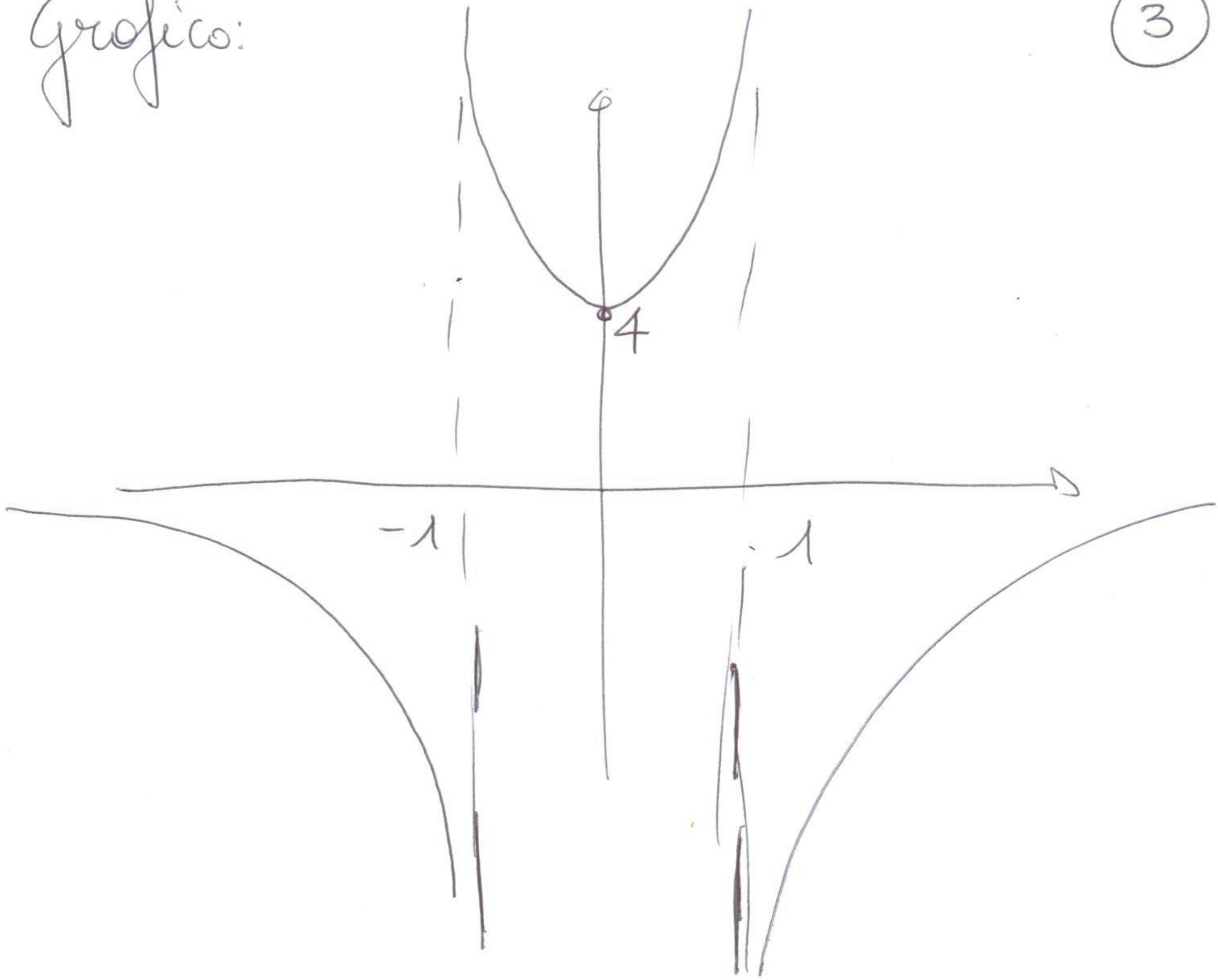
$$\Longleftrightarrow 1-x^2>0 \qquad \Longleftrightarrow -1<x<1$$

$\Rightarrow f$ concava in $(-\infty,-1)$

convessa in $(-1,1)$

concava in $(1,+\infty)$

Grofico:



2) ⓐ $$\frac{2x^2-3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x^2-1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+C=0 \\ A-B-C=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=-2A \\ 3A-B=-3 \\ A+B=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{9}{4} \\ C=+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \left[-\frac{1}{4(x-1)} + \frac{9}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{9}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{9}{4} \ln 4 - \frac{1}{8} - \left(\frac{9}{4} \ln 3 - \frac{1}{6} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{18}{4} \ln 2 - \frac{9}{4} \ln 3 + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{17}{4} \ln 2 - \frac{9}{4} \ln 3 + \frac{1}{24}.$$

b) Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \frac{2}{x}$

NON INTEGRABILE a $+\infty$

Per $x \to 1^+$ $\quad f(x) \sim \frac{-1}{4(x-1)}$

NON INTEGRABILE per $x \to 1^+$.

c) Ovviamente, in entrambi i casi gli integrali divergono, come si può verificare anche ponendo

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{9}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{2(x+1)}\right]_2^{+\infty}$$

$$=\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{(x+1)^9}{x-1}\right)-\frac{1}{2(x+1)}\right]_2^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{(x+1)^9}{x-1}\right]-\frac{1}{4}\ln\left(3^9\right)-\frac{1}{6}$$

$$=+\infty$$

e

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \cancel{\left[\frac{1}{4}\ln\left[\frac{(x+1)^9}{x-1}\right.\right.}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{9}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{2(x+1)}\right]_1^3$$

$$=\frac{17}{4}\ln 2-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\lim_{x\to1^+}\ln(x-1)-\frac{9}{4}\ln 2$$

$$+\frac{1}{4}=-\infty.$$

3) $$iy + \cancel{x^2} - y^2 + 2ixy = \cancel{x^2} + y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ y(1+2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

INFINITE SOLUZIONI, DATE DALL'ASSE DELLE x.

4) $x \in \mathbb{R}$; $y \neq 0$.

NON ESISTONO SOL. SINGOLARI

$$\int y\,dy = \int \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} = C$$

$$\Rightarrow y^2 = 2\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x^2}{e}\right)\right]$$

Poichè y non si può annullare, avremo (7)
una sol. sempre positiva e una sempre
negativa. Ma a noi interessa l'unica
tale che $y(0) = -1 < 0$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -\sqrt{2x \operatorname{arctg} x - \ln\left(\frac{1+x^2}{e}\right)}$$

La soluzione è unica ~~perchè~~ almeno localmente,

$$A(x) = \operatorname{arctg} x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$B(y) = \frac{1}{y} \in C^\infty(I)$$, dove I è un intorno di -1 che non contenga $y=0$.

5)

$$a_n = 2n^5\left[-\cancel{\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) + \cancel{\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{6n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\right]$$

$$= 2n^5\left[-\frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right] \sim -\frac{1}{n}$$

Serie divergente, per confronto con la serie armonica.