EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI DEL SECONDO ORDINE

$$y'' + a\,y' + by = f(x) \qquad (*)$$

L'integrale generale di (*) ha la forma $y(x) = z(x) + \varphi(x)$, dove $z(x)$ e' l'integrale generale della omogenea associata, mentre $\varphi(x)$ e' UNA soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Equazione caratteristica dell'omogenea associata: $\lambda^2+a\lambda+b=0$, con soluzioni λ_1 , λ_2

z(x)	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \in$ **R**	$z(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
	$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \in$ **R**	$z(x) = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2x)$
	$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$	$z(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

Come trovare $\varphi(x)$ (ossia determinare i valori delle costanti) col metodo di somiglianza

Se $f(x)$ = polinomio di grado n

Se $\alpha=0$ NON è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$, cioè $b\neq 0$	$\varphi(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ \ldots$
Se $\alpha=0$ è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ di molteplicità 1, cioè $b=0 \quad a\neq 0$	$\varphi(x) = x(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ \ldots$
Se $\alpha=0$ è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ di molteplicità 2, cioè $b=a=0$	$\varphi(x) = x^2\,(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ \ldots$

Se $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, con $P(x)$ = polinomio di grado n

Se α NON è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$	$\varphi(x) = e^{\alpha x}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)$
Se α è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ di molteplicità r	$\varphi(x) = x^re^{\alpha x}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)$

Se $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x$, con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi di grado rispettivamente $m, n \geq 0$

Se $\alpha+i\beta$ NON è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$	$\varphi(x) = e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x)$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi di grado non superiore al più grande fra i gradi di $P(x)$ e $Q(X)$
Se $\alpha+i\beta$ è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$	$\varphi(x) = x[e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x)]$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi di grado non superiore al più grande fra i gradi di $P(x)$ e $Q(X)$

Se $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Sovrapposizione delle soluzioni
Applico 2 volte uno dei procedimenti precedenti, una volta per $f(x) = f_1(x)$ e ottengo $\varphi_1(x)$; poi lo applico a $f(x) = f_2(x)$ e ottengo $\varphi_2(x)$. La soluzione cercata sarà quindi $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$

CASO GENERALE (METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI, DI LAGRANGE)

Trovo l'integrale generale dell'omogenea associata $z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ come fatto in precedenza.
Cerco poi l'integrale particolare $\varphi(x)$ della non omogenea nella forma $\varphi(x)=\gamma_1(x)y_1(x)+\gamma_2(x)y_2(x)$, dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono proprio le funzioni con cui abbiamo costruito $z(x)$, e dove $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ sono funzioni da determinare.
La posizione fatta ci porta a risolvere il sistema, lineare nelle incognite $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$,

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)y_1(x) + \gamma_2'(x)y_2(x) = 0 \\ \gamma_1'(x)y_1'(x) + \gamma_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

da cui ricavo $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$ che, integrate, mi consentono di trovare le due funzioni incognite $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$.

L'integrale generale sarà quindi $y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+ y_1(x)\gamma_1(x) + y_2(x)\gamma_2(x)$.