E. GIUSTI – Analisi Matematica 2

5 Sviluppi in serie di Fourier

Vogliamo ora studiare la possibilità di approssimare una funzione periodica $f(x)$, che supporremo per semplicità di periodo 2π, per mezzo delle somme trigonometriche

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

o meglio di sviluppare la funzione $f(x)$ in *serie di Fourier*:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \qquad [5.1]$$

I coefficienti a_k e b_k dipenderanno evidentemente dalla funzione $f(x)$ in esame. Supponiamo per un momento che la serie a secondo membro converga uniformemente alla funzione $f(x)$; moltiplichiamo ambo i membri della [5.1] per $\cos mx$ e integriamo tra $-\pi$ e π (o, il che è equivalente, tra a e $a+2\pi$). Se si osserva che si può integrare termine a termine (vedi proposizione 1.1) e si ricordano le relazioni

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{se } m\neq k\\ \pi & \text{se } m=k\neq 0\end{cases}\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin mx\,\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{se } m\neq k\\ \pi & \text{se } m=k\neq 0\end{cases}\end{cases} \qquad [5.2]$$

si ottiene immediatamente

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x, \qquad [5.3]$$

che vale anche per $m=0$ in virtù del fattore 1/2 che nella [5.1] moltiplica a_0. Analogamente, moltiplicando ambo i membri della [5.1] per $\sin mx$ e integrando,

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x. \qquad [5.4]$$

I coefficienti a_k e b_k si chiamano *coefficienti di Fourier* relativi alla funzione $f(x)$.
Si hanno i seguenti risultati.

Teorema 5.1 *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π e regolare a tratti; la serie di Fourier della f,*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \qquad [5.5]$$

converge a $f(x)$ nei punti in cui f è continua. Inoltre in un punto x_0 di discontinuità la serie [5.5] converge alla media dei limiti sinistro e destro:

$$\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0)).$$

Osservazione. Nei punti x in cui la f è continua si ha evidentemente

$$\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))=f(x).$$

Così se cambiamo il valore della $f(x)$ nei punti di discontinuità, ponendo in tali punti

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)), \qquad [5.6]$$

la serie di Fourier [5.5] convergerà puntualmente alla funzione f così modificata. ■

Teorema 5.2 *Se la funzione $f(x)$ è continua in $\mathbf{R}$ e regolare a tratti, la serie [5.5] converge totalmente, e quindi uniformemente, alla funzione $f(x)$.*

Infine si ha il

Teorema 5.3 *Se $f(x)$ è regolare a tratti la serie [5.5] converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in cui la funzione $f(x)$ è continua.*

La dimostrazione di questi teoremi verrà data nel prossimo paragrafo; in questo discuteremo alcuni esempi.

Esempio 5.1
Una funzione $f(x)$ si dice *pari* se per ogni $x\in\mathbf{R}$

$$f(-x)=f(x).$$

Se invece risulta

$$f(-x)=-f(x)$$

la funzione $f(x)$ si dice *dispari*.