CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 17 gennaio 2000)
vecchio ordinamento

COGNOME .... **NOME** ....

1. Data l'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + y' = e^{-x}$$

costruire l'integrale generale e la soluzione del Problema di Cauchy relativo alle condizioni

$$y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 2 \quad ; \quad y''(0) = 0$$

fornendo di tale problema l'interpretazione geometrica.

2. Calcolare il volume del solido descritto dalla rotazione del dominio

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 8 \leq x^2 + y^2 \leq 4y \ \}$$

intorno all'asse delle x .

3. Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $S(x, y)$ della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ \frac{3^{k(x^2-y^2)}}{k9^{k-1}} \ .$$

4. Determinare a e b reali in modo che la funzione

$$u(x, y) = e^{ax+by} \cos(x + y)$$

sia armonica in tutto $I\!R^2$.
Costruire quindi la funzione olomorfa $f(z)$ che abbia tale $u(x, y)$ come parte reale.

SOLUZIONI

1.

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} - \frac{1}{2}\, x^2 e^{-x}$$

$$\overline{y}(x) = 6 - 5e^{-x} - 3xe^{-x} - \frac{1}{2}\, x^2 e^{-x}$$

2.

$$8\pi^2$$

3.

$$\Phi(x,y) = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 - y^2 \leq 2 \}$$

$$S(x,y) = 9 \log \left(1 + 3^{x^2 - y^2 - 2} \right)$$

4.

$\alpha)$ $a = 1$; $b = -1$

$$v_1(x,y) = e^{x-y} \sin(x+y)$$

$$f_1(z) = e^{(1+i)z}$$

$\beta)$ $a = -1$; $b = 1$

$$v_2(x,y) = e^{y-x} \sin(x+y)$$

$$f_2(z) = e^{-(1+i)z}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 26 gennaio 2000)
vecchio ordinamento

COGNOME .... **NOME** ....

1. Determinare per quali $\beta \in I\!R$ è sommabile in $(0, +\infty)$ la funzione

$$f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{x^\beta} \ .$$

Calcolare, mediante uno sviluppo in serie,

$$\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x} \, dx \ .$$

(F) Stimare l'errore che si commette nel calcolare la somma dei primi n termini della serie degli integrali.

2. Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $f(z)$ della serie complessa

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{z}{2z - i} \right]^{2k+1} \frac{1}{2k+3} \ , \qquad z \in \mathbf{C} \ .$$

Giustificare l'olomorfia di $f(z)$ in Φ.

3. Calcolare

$$\mathcal{I} = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \ ,$$

essendo

$$T = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\} \ .$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - \dfrac{2}{x+2} y'' = 1 \ ; \\ y(0) = 0 \ ; \qquad y'(0) = 2/3 \ ; \\ y''(0) = 2 \ . \end{cases}$$

Interpretare geometricamente la condizione $y''(0) = 2$.

SOLUZIONI

1.

$$1 < \beta < \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(k+\frac{1}{2})}\ .$$

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{(2n+3)!(n+\frac{3}{2})}\ .$$

2.

$$f(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z-i}{z}\right)^2\ \left[\frac{z}{2z-i} - \arctan\left(\frac{z}{2z-i}\right)\ \right] & \text{se } z \neq 0; \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

$$\Phi(z)\ =\ \left(\ \overline{B}\left(\ \frac{2}{3}i, \frac{1}{3}\ \right)\ \right)^c$$

3.

$$\frac{304}{5}\pi$$

4.

$$y(x) = \frac{x(x+2)^3}{12}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 24 febbraio 2000)
vecchio ordinamento

COGNOME .... **NOME** ....

1. Calcolare il volume del solido T descritto dal dominio

$$\Lambda = \{(x,y) \in I\!R^2 \ : \ 2y \le x^2 + y^2 \le 4y \quad \text{e} \quad |x| \le \sqrt{3}y\} \ ,$$

quando il piano Oxy ruota di 2π intorno all'asse x.

È facoltativo trattare il caso piú generale sostituendo a Λ

$$\Lambda^* = \{(x,y) \in I\!R^2 \ : \ 2ry \le x^2 + y^2 \le 2Ry \quad \text{e} \quad |x| \le \lambda y\} \ ,$$

con $r < R$ e $\lambda > 0$.

2. Calcolare l'integrale

$$\oint_{+\gamma} x^2 y^2 \ dx + \frac{1}{2+y} \ dy$$

essendo $+\gamma$ la curva di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 8y = 0 \ ,$$

orientata come frontiera positiva del dominio limitato in essa racchiuso.

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{IV} - 2y^{III} + \lambda y'' = \mathrm{e}^{-x} \ ,$$

per $\lambda > 1$ e dedurre che vi è una sola soluzione y_λ che verifica la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} y_\lambda(x) = 0 \ .$$

È facoltativo stabilire che lo stesso risultato è vero anche per $0 \le \lambda \le 1$, mentre non lo è per $\lambda < 0$.

4. Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $S(z)$ della serie complessa

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{(2z-3i)^{k+1}} \ .$$

Indipendentemente dall'espressione di $S(z)$, spiegare perché $S(z)$ è olomorfa in Φ.

SOLUZIONI

1.

$$Vol(T) = \frac{7}{6}\pi(8\pi + 7\sqrt{3}) \ ;$$

$$\text{Vol }(T_{(R,r,\lambda)}) = \frac{8\pi}{3}(R^3 - r^3)\left[\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}\arctan\frac{1}{\lambda} + \sin\left(2\arctan\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{8}\sin\left(4\arctan\frac{1}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)\left[3\arctan\lambda + \frac{(5+3\lambda^2)\lambda}{(1+\lambda^2)^2}\right] \ .$$

2.

$-4\pi.$

3.

Per $\lambda > 1$ si ha

$$y_\lambda(x) = C_1 + C_2 x + \mathrm{e}^x\left[C_3\cos(\sqrt{\lambda-1}x) + C_4\sin(\sqrt{\lambda-1}x)\right] + \frac{1}{3+\lambda}\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

$$\overline{y}_\lambda(x) = \frac{1}{3+\lambda}\mathrm{e}^{-x} \ .$$

Per $\lambda = 1$ si ha

$$y_1(x) = C_1 + C_2 x + C_3\mathrm{e}^x + C_4 x\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

$$\overline{y}_1(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} \ .$$

Per $0 < \lambda < 1$ si ha

$$y_\lambda(x) = C_1 + C_2 x + C_3\mathrm{e}^{[1+\sqrt{1-\lambda}]x} + C_4\mathrm{e}^{[1-\sqrt{1-\lambda}]x} + \frac{1}{3+\lambda}\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

$$\overline{y}_\lambda(x) = \frac{1}{3+\lambda}\mathrm{e}^{-x} \ .$$

Per $\lambda = 0$ si ha

$$y_0(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

$$\overline{y}_0(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x} \ .$$

Per $\lambda < 0$, $\lambda \neq -3$, si ha

$$y_\lambda(x) = C_1 + C_2 x + C_3\mathrm{e}^{[1+\sqrt{1-\lambda}]x} + C_4\mathrm{e}^{[1-\sqrt{1-\lambda}]x} + \frac{1}{3+\lambda}\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

$$\overline{y}_\lambda(x) = C_4\mathrm{e}^{[1-\sqrt{1-\lambda}]x} + \frac{1}{3+\lambda}\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

quindi ci sono infinite soluzioni.
Per $\lambda = -3$ si ha

$$y_{-3}(x) = C_1 + C_2 x + C_3\mathrm{e}^{3x} + C_4\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

$$\overline{y}_{-3}(x) = C_4\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-x} \ ;$$

quindi ci sono infinite soluzioni.

4.

$$\Phi(z) = \left[\overline{B}(2i,1)\right]^c \qquad ; \qquad S(z) = \frac{z}{(2z-3i)^2(z-3i)}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 2 giugno 2000)
vecchio ordinamento

COGNOME .... **NOME** ....

1.

Calcolare l'integrale

$$\iiint_T \frac{z}{(\ 1+x^2+y^2\ )}\ dx\ dy\ dz\ ,$$

essendo

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad 4 \le x^2+y^2 \le 9 \qquad \text{e} \qquad 0 \le z \le x+y\ \}\ .$$

2.

Determinare la curva integrale della EquaDiff

$$y" = 2\cos 2x\ \sqrt{2y'-1}$$

che passa per il punto $(\ \pi, 0\ )$ ed ha in tale punto la retta tangente parallela a quella di equazione

$$x - 2y = 1\ .$$

3.

Determinare il campo di esistenza e la primitiva $F(x,y,z)$ della forma differenziale

$$\left(\log(1+y) - \frac{z}{1+x}\right)\ dx + \frac{x}{1+y}\ dy - \log(1+x)\ dz$$

che verifica la condizione $F(1,1,1) = 3$.

4.

Determinare gli α reali per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n\cos^2 x + 2}}{(n+1)^{\alpha}}$$

è totalmente convergente; verificare che, per gli stessi valori di α , tale serie è anche derivabile termine a termine.

SOLUZIONI

1.

$$\frac{\pi}{4}(5-\log 2)$$

2.

NON VALE IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA'.

Per $x \leq \pi$

$$y(x)=\frac{1}{2}(x-\pi)$$

Per $x \geq \pi$ si hanno le due soluzioni

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{3}{4}(x-\pi)-\frac{1}{16}\sin 4x \ ; \\ y_2(x) &= \frac{1}{2}(x-\pi) \ . \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} I_{def} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x > -1 \ ; \ y > -1 \ \} \qquad (\text{DIEDRO}) \ ; \\ F(x,y,z) = x\log(1+y) - z\log(1+x) + 3 \ . \end{aligned}$$

4.

$$\alpha > \frac{3}{2} \ .$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 15 giugno 2000)
vecchio ordinamento

COGNOME .... **NOME** ....

1.

Calcolare il volume del solido T, descritto dalla rotazione intorno all'asse x del segmento di ellisse

$$\Lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{2} + y \geq 1 \right\} .$$

2.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{2y'}{x \log x} + \dfrac{2\sqrt{y'}}{x \log x} = 0 \\ y(e) = 1 \qquad ; \qquad y'(e) = 1. \end{cases}$$

3.

Calcolare la lunghezza dell'arco regolare

$$\gamma \ : \ \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t^2 + 1 \end{cases} \qquad\qquad ; \ t \in [\ 0 \ , \ 2\pi \ ].$$

4.

Determinare l'insieme di convergenza assoluta Φ_a della serie complessa $(z = x + iy)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z^2}}.$$

(Suggerimento: si ricordi che $\frac{1}{n^{z^2}} = e^{-z^2 \log n}$).

Dimostrare che la funzione somma di tale serie è una funzione olomorfa in Φ_a.

SOLUZIONI

1.

$$\frac{2}{3}\pi$$

2.

$$y(x) = x + 1 - e$$

3.

$$l(\gamma) = \log\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}$$

4.

$$\Phi_a \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 - y^2 > 1\ \}$$

La funzione somma è olomorfa in Φ_a , in virtù del **Teorema di Weierstrass** per le funzioni complesse.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 4 luglio 2000)
vecchio ordinamento

COGNOME .... **NOME** ....

1.

Calcolare il volume del solido T, descritto dal segmento di ellisse

$$\Lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \qquad ; \qquad 2x + y \geq 2 \right\} ,$$

quando il piano $0xy$ ruota di 2π intorno all'asse x.

2.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} + x^2 \sqrt{y'} = 0 \\ y(1) = 0 \qquad ; \qquad y'(1) = 1. \end{cases}$$

3.

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva regolare avente equazioni parametriche

$$x = \cos 3t \quad ; \quad y = \sin 3t \quad ; \quad z = \log(2 \sin 3t) \quad ; \quad t \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right]$$

4.

Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $S(z)$ della serie complessa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{|z-1|^{2k}}{(z-1)^k k!} \ .$$

Verificare se la funzione somma di tale serie è una funzione olomorfa in Φ.

SOLUZIONI

1.

$$\frac{4}{3}\pi$$

2.

$$y(x) = \frac{1}{49}\left[64\log x + \frac{x^7}{7} - \frac{32}{7}\,x^{7/2} + \frac{31}{7}\right]$$

3.

$$\log\left[\frac{\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cot\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\right] \quad = \quad 2\log(1+\sqrt{2})$$

dove si sono usate le **formule di bisezione**.

4.

$$I_{def} \;=\; \Phi \;=\; \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 1\ \}\ ;$$
$$S(z) \;=\; e^{1-\overline{z}} - 1\ .$$

La funzione $S(z)$ NON È OLOMORFA.