CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta del I MODULO di ANALISI MATEMATICA II - 14 gennaio 2000)
Compito A

COGNOME .... **NOME** ....

1. Data l'equazione differenziale

$$y'' - \frac{3\cos x}{1+\sin x} y' = 0$$

determinare la curva integrale che passi per il punto $P_0 = (\pi/2, 1)$ ed abbia in tale punto come retta tangente τ quella di equazione cartesiana

$$4x - y - 2\pi + 1 = 0 \ .$$

2. Calcolare

$$\mathcal{I} = \iint_T \frac{y}{4+x^2+y^2} \ dx \ dy \ ,$$

essendo

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2+y^2 \geq 8 \ \text{ e } \ x^2+y^2 \leq 4y\} \ .$$

3. Calcolare

$$I = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \ dx \ .$$

(F) Spiegare perché, fissati arbitrariamente α e β reali positivi, la funzione

$$f(x) = x^\beta \mathrm{e}^{-x^\alpha}$$

è sommabile su $[0, +\infty[$.

4. Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $S(z)$ della serie complessa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{(z-i)^k} \ ,$$

e riconoscere che $S(z)$ è olomorfa in Φ (e addirittura in ...).

(F) Estendere questo risultato ad ogni serie complessa del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^k} \ ,$$

sotto l'ipotesi che esistano M ed r reali positivi tali che

$$|a_k| \leq M r^k \qquad \forall k \in I\!N \ ,$$

stabilendo che la somma di tale serie è olomorfa in $(\overline{B}(z_0, r))^c$.

SOLUZIONI

1.

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[\,\frac{5}{2}x - 4\cos x - \frac{3}{2}\cos x \sin x + \frac{\cos^3 x}{3}\right] + 1 - \frac{5\pi}{8}$$

2.

$$\mathcal{I} = \frac{3\pi}{2} - 2 - 2\sqrt{5}\ \text{arctan}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$$

3.

$$I = 12$$

4.

$$\Phi(z) = (\overline{B}(i,3))^c$$

$$S(z) = \frac{1}{(z-i-3)} \qquad \text{olomorfa in} \quad \mathbf{C} \setminus \{z = i+3\}$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta del I MODULO di ANALISI MATEMATICA II - 14 gennaio 2000)
Compito B

COGNOME .... **NOME** ....

1. Data l'equazione differenziale

$$y'' + \frac{3\sin x}{1+\cos x} y' = 0$$

determinare la curva integrale che passi per il punto $P_0 = (\pi/2, 1)$ ed abbia in tale punto come retta tangente τ quella di equazione cartesiana

$$4x - y - 2\pi + 1 = 0 \ .$$

2. Calcolare

$$\mathcal{I} = \iint_T \frac{x}{4+x^2+y^2} \, dx \, dy \ ,$$

essendo

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2+y^2 \geq 8 \ \text{ e } \ x^2+y^2 \leq 4x\} \ .$$

3. Calcolare

$$I = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x}} \, dx \ .$$

(F) Spiegare perché, fissati arbitrariamente α e β reali positivi, la funzione

$$f(x) = x^{\beta}\mathrm{e}^{-x^{\alpha}}$$

è sommabile su $[0, +\infty[$.

4. Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $S(z)$ della serie complessa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{k-1}}{(z+i)^k} \ ,$$

e riconoscere che $S(z)$ è olomorfa in Φ (e addirittura in ...).

(F) Estendere questo risultato ad ogni serie complessa del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^k} \ ,$$

sotto l'ipotesi che esistano M ed r reali positivi tali che

$$|a_k| \leq M r^k \qquad \forall k \in I\!N \ ,$$

stabilendo che la somma di tale serie è olomorfa in $(\overline{B}(z_0, r))^c$.

SOLUZIONI

1.

$$y(x) = 4\left[\frac{5}{2}x + 4\sin x + \frac{3}{2}\cos x \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right] - \left(\frac{41}{3} + 5\pi\right)$$

2.

$$\mathcal{I} = \frac{3}{2}\pi - 2 - 2\sqrt{5}\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

3.

$$I = 360$$

4.

$$\Phi(z) = (\overline{B}(-i, 5))^c$$

$$S(z) = \frac{1}{z + i - 5} \qquad \text{olomorfa in} \quad \mathbf{C} \setminus \{z = 5 - i\}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “LA SAPIENZA”
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 26 gennaio 2000)
primo modulo

COGNOME .... **NOME** ....

1. Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $f(x,y)$ della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(3x^2-y^2)^{2k}}{2k+1} \ .$$

Discutere la convergenza uniforme della suddetta serie.

2. Calcolare, con il metodo dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}\ dx \ .$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{2}{(1+x^2)\arctan x} y + (x\arctan x)\sqrt{y} = 0 \ ; \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

4. Calcolare

$$\mathcal{I} = \iint_T \sqrt{4-x^2-y^2}\ dx\ dy \ ,$$

dove

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le 2y \le x^2+y^2 \le 4\} \ .$$

SOLUZIONI

1.

$$\Phi(x,y) = \Phi_{unif} \ = \{(x,y) \in I\!R^2 \ | \ -1 \leq 3x^2 - y^2 \leq 1 \ \}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan\left(3x^2-y^2\right)}{3x^2-y^2} - 1 & \text{se } y \neq \pm\sqrt{3}x; \\ 0 & \text{se } y = \pm\sqrt{3}x. \end{cases}$$

2.

$$\frac{\pi}{6}$$

3.

$$y(x) = \left[\frac{16 + \left(1 - x^2\right)\pi}{4\pi}\right]^2 \arctan^2 x$$

4.

$$\frac{32}{9}$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta del I MODULO di ANALISI MATEMATICA II - 23 febbraio 2000)
Compito A

COGNOME .... **NOME** ....

1. Determinare la funzione $h(y)$ di classe C^1 in modo che il campo vettoriale

$$\mathbf{V}(x,y,z) \; = \; \left(\frac{h(y)}{x} + \log z\right)\mathbf{i} + \left(\;\sqrt{4-y^2}\log x\;\right)\mathbf{j} + \frac{x}{z}\,\mathbf{k},$$

sia conservativo all'interno del suo insieme di definizione e costruirne un Potenziale.

2. Costruire la serie di Fourier della funzione 2π - periodica

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{se} \;\; x \in [0,\pi[; \\ \\ 2x - 4\pi & \text{se} \;\; x \in [\pi, 2\pi[\;. \end{cases}$$

e $f(x+2\pi) = f(x)$, $\forall x \in I\!R$, calcolando la funzione somma di tale serie in ogni punto $x \in I\!R$. Indicare in quali intervalli di $I\!R$ tale serie NON converge uniformemente.

3. Calcolare

$$I = \iint_T \; \frac{|y|}{\left(x^2+y^2\right)^2} \; dx \; dy \;,$$

essendo

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 1 \le \; x^2+y^2 \le 4x, \;\; \text{e} \;\; |y| \le \sqrt{3}x\} \;.$$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2-2x}{x^4+11x^2+18} \; dx \;,$$

mediante il Teorema dei Residui, giustificandone la utilizzazione.

SOLUZIONI

1.

$$I_{def} = \{\ x > 0\ ; -2 \leq y \leq 2; z > 0\ \}$$

$$h(y) = y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$F(x,y,z) = \left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right]\log x + x\log z + C \quad ; \ C \in I\!R$$

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)\cos(kx) + \frac{1}{k}\left(1-3(-1)^k\right)\sin(kx)\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos\left[(2m-1)x\right] + \frac{4}{2m-1}\sin\left[(2m-1)x\right] - \frac{1}{m}\sin(2mx)\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{-\pi}{2} & \text{se } \ x = (2h+1)\pi \quad ; \ h \in \mathbf{Z}; \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \ x = 2h\pi \quad ; \ h \in \mathbf{Z}; \\ f(x) & \text{altrove.} \end{cases} .$$

La serie non converge uniformemente in tutti gli intervalli che abbiano almeno un punto $x_k = k\pi$ tra i punti di accumulazione.

3.

$$I = 1 - \frac{1}{2}\log 2$$

4.

$$\frac{3}{7}\pi\left(3 - \sqrt{2}\right)$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta del I MODULO di ANALISI MATEMATICA II - 23 febbraio 2000)
Compito B

COGNOME .... **NOME** ....

1. Determinare la funzione $g(x)$ di classe C^1 in modo che il campo vettoriale

$$\mathbf{V}(x,y,z) \ = \Big(\ \sqrt{9-x^2}\log z \ \Big)\,\mathbf{i} + \frac{z}{y}\mathbf{j} + \ \left(\frac{g(x)}{z} + \log y\right)\ \mathbf{k},$$

sia conservativo all'interno del suo insieme di definizione e costruirne un Potenziale.

2. Costruire la serie di Fourier della funzione 2π - periodica

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } \ x \in [0,\pi[; \\ \\ \pi & \text{se } \ x \in [\pi, 2\pi[\ . \end{cases}$$

e $f(x+2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calcolando la funzione somma di tale serie in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Indicare in quali intervalli di $\mathbb{R}$ tale serie NON converge uniformemente.

3. Calcolare

$$I = \iint_T \ \frac{|x|}{(x^2+y^2)^2}\ dx\ dy \ ,$$

essendo

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \ x^2+y^2 \le 2y, \ \ \text{e} \ \ |x| \le \sqrt{3}y\} \ .$$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-3x}{x^4+9x^2+20}\ dx \ ,$$

mediante il Teorema dei Residui, giustificandone la utilizzazione.

SOLUZIONI

1.

$$I_{def} \;=\{\; -3 \le x \le 3 \;; y>0 \;; z>0\}$$

$$g(x) = \frac{9}{2}\left[\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$F(x,y,z) = \frac{9}{2}\left[\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]\log z + z\log y + C \;\;;\; C \in I\!R$$

2.

$$\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi k^2}\Big((-1)^k - 1\Big)\cos(kx) - \frac{1}{k}\Big(1+(-1)^k\Big)\sin(kx)\right]$$

$$= \pi - \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos\left[(2m-1)x\right] + \frac{1}{m}\sin(2mx)\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{3\pi}{2} & \text{se } \;x=(2h+1)\pi \quad ;\; h \in \mathbf{Z}; \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \;x = 2h\pi \quad ;\; h \in \mathbf{Z}; \\ f(x) & \text{altrove.} \end{cases} \qquad .$$

La serie non converge uniformemente in tutti gli intervalli che abbiano almeno un punto $x_k = k\pi$ tra i punti di accumulazione.

3.

$$I = 1 - \log 2$$

4.

$$2\pi\left(\sqrt{5}-2\right)$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 2 giugno 2000)
primo modulo

COGNOME .... **NOME** ....

1.

Determinare per quali valori del parametro reale λ l'EquaDiff

$$y''' + (\lambda^2 - 4)y' = \sin 3x$$

ha tutti gli integrali limitati in $\mathbb{R}$.

Ponendo poi $\lambda = \sqrt{13}$, risolvere il Problema di Cauchy

$$y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = -1 \quad ; \quad y''(0) = 0 \ .$$

2.

Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $f(z)$ della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{e^{n(z^2-i)}} \ .$$

Costruire qualche insieme di convergenza totale della suddetta serie.

3.

Verificare che la funzione

$$u(x,y) = e^y \, [\ x\cos x + (y-2)\sin x]$$

è armonica in tutto $\mathbb{R}^2$ e costruire la funzione olomorfa (intera) che ha $u(x,y)$ come parte reale.

4.

Calcolare, con il teorema dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+13x^2+36} \ dx \ ,$$

motivando le operazioni eseguite.

SOLUZIONI

1.

$$-\mathbf{2} < \lambda < \mathbf{2} \ :$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{\sqrt{4-\lambda^2}x} + C_3 e^{-\sqrt{4-\lambda^2}x} + \frac{1}{3(13-\lambda^2)}\cos 3x \ ;$$

$$\{\lambda < -\mathbf{2} \ ; \ \lambda \neq -\sqrt{\mathbf{13}}\} \ \cup \ \{\lambda > \mathbf{2} \ ; \ \lambda \neq \sqrt{\mathbf{13}}\} :$$

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos(\sqrt{\lambda^2-4}x) + C_3 \sin(\sqrt{\lambda^2-4}x) + \frac{1}{3(13-\lambda^2)}\cos 3x \ ;$$

$$\lambda = \pm\mathbf{2} \ :$$

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{1}{27}\cos 3x \ ;$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\mathbf{13}} \ :$$

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x - \frac{1}{18} x \sin 3x \ .$$

Si hanno soluzioni limitate nei seguenti casi:

$$-\mathbf{2} < \lambda < \mathbf{2} \ :$$

$$y(x) = C_1 + \frac{1}{3(13-\lambda^2)}\cos 3x \ ;$$

$$\{\lambda < -\mathbf{2} \ ; \ \lambda \neq -\sqrt{\mathbf{13}}\} \ \cup \{\lambda > \mathbf{2} \ ; \ \lambda \neq \sqrt{\mathbf{13}}\} :$$

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos(\sqrt{\lambda^2-4}x) + C_3 \sin(\sqrt{\lambda^2-4}x) + \frac{1}{3(13-\lambda^2)}\cos 3x \ ;$$

$$\lambda = \pm\mathbf{2} \ :$$

$$y(x) = C_1 + \frac{1}{27}\cos 3x \ ;$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\mathbf{13}} :$$

non esistono soluzioni limitate.

Il Problema di Cauchy, per $\lambda = \sqrt{13}$, ammette la seguente soluzione:

$$\overline{y}(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left[\cos 3x + \sin 3x\right] - \frac{1}{18} x \sin 3x \ .$$

2.

$$I_{def} = \mathbf{C} \ ; \quad \Phi \ = \ \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 - y^2 > \log 3 \ \} \ ; \quad f(z) = \frac{9}{e^{z^2-i} - 3} \ .$$

Convergenza totale in

$$\Phi_{TOT} \ = \ \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 - y^2 \geq \log 3 - \log h \ ; \ 0 < h < 1 \ \} \ .$$

3.

$$v(x,y) = e^y \left[(y-2)\cos x - x \sin x\right] \ ; \quad f(z) = e^{-iz}(z - 2i) \ .$$

4.

$$\frac{7\pi}{60}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 15 giugno 2000)
primo modulo

COGNOME .... **NOME** ....

1.

Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2\cot x(y' + \sqrt{y'}) = 0 \\ y(\pi/2) = 0 \qquad ; \qquad y'(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

2.

Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $S(z)$ della serie complessa

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{2^{k-1}(k-1)!} \qquad ; \qquad [z = x + iy] \ .$$

Spiegare perché $S(z)$ è olomorfa in tutto $\mathbf{C}$ e costruire le parti reale e immaginaria di $S(z)$.

3.

Trovare le funzioni $h(y)$ in modo che

$$v(x,y) = e^{-y}(x\cos x + h(y)\sin x)$$

sia la parte immaginaria di una funzione $f(z)$ olomorfa in tutto $\mathbf{C}$. In corrispondenza della più semplice di tali $h(y)$ costruire $f(z)$.

4.

Calcolare l'integrale

$$\iint_T e^{\sqrt{x^2+y^2}}|x| \; dx \; dy \ ,$$

essendo

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \quad 4 \le x^2 + y^2 \le 16 \qquad \text{e} \qquad y \ge 0 \ \} \ .$$

SOLUZIONI

1.

$$\overline{y}(x) = 3x + 4\cos x - \sin 2x - \frac{3\pi}{2}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \mathbf{C} \\
S(z) &= (z-i)\left[e^{\left(\frac{z-i}{2}\right)} - 1\right] \\
Re(S(z)) &= x\left[e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{y-1}{2}\right) - 1\right] - (y-1)e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{y-1}{2}\right) \ ; \\
Im(S(z)) &= (y-1)\left[e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{y-1}{2}\right) - 1\right] + xe^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{y-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

3.

$$h(y) = C_1 + C_2 e^{2y} - y$$

Per $h(y) = -y$ si ha:

$$u(x,y) = e^{-y}(-y\cos x - x\sin x)$$

$$f(z) = ize^{iz}$$

4.

$$4e^2(5e^2 - 1)$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “LA SAPIENZA”
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000
Prof. A. Avantaggiati
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 4 luglio 2000)
primo modulo

COGNOME .... **NOME** ....

1.

Sia $u(x,y)$ una funzione armonica *positiva* definita in $\mathbb{R}^2$, cioè

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Dimostrare che $u(x,y)$ è costante.

(Suggerimento: considerare la funzione armonica v, coniugata di u, la funzione olomorfa f che si costruisce con essa e applicare il *Teorema di Liouville* a e^{-f}.)

2.

Sia $a > 0$, $a \neq 2$. Sia C_a il cerchio di centro l'origine e raggio a. Si calcoli

$$\int_{C_a} \frac{z^2 + e^z}{z(z-2)} \, dz \ .$$

3.

Costruire l'integrale generale della EquaDiff

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = \cos x + 2 \sin x \ .$$

4.

Determinare l'insieme di convergenza Φ e la funzione somma $S(z)$ della serie complessa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{|z+i|^{2k}}{(z+i)^k k!} \ .$$

Verificare se la funzione somma di tale serie è una funzione olomorfa in Φ.

SOLUZIONI

1.

$f = u + iv$ è olomorfa ; $\Longrightarrow e^{-f}$ è olomorfa ; inoltre essa è limitata, perché $|e^{-f}| = e^{-u} \leq 1 \quad \Longrightarrow$ (per il Teorema di Liouville) e^{-f} è costante $\quad \Longrightarrow f = cost \quad \Longrightarrow u = cost$.

2.

$$-\pi i$$

3.

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{2} \sin x \ .$$

4.

$$I_{def} \ = \ \Phi \ = \ \{ z \in \mathbf{C} \mid z \neq -i \ \} \ ;$$
$$S(z) \ = \ e^{\overline{z} - i} - 1 \ .$$

La funzione $S(z)$ NON È OLOMORFA.