Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica
Corso di Analisi Matematica - a.a. 2001/02
Docente: Dott. Alberto Maria BERSANI

ESERCIZI SVOLTI SU LIMITI, CONTINUITÀ, DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Esercizio 1)

Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \; .$$

Svolgimento: la funzione non è definita in $(0,0)$.
Calcoliamo il limite per (x,y) muoventesi su una retta passante per l'origine.
a) lungo l'asse delle x si ha $(x,y)=(x,0)$. In tal caso si ha $f(x,0)=0$, da cui $\displaystyle\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
b) lungo l'asse delle y si ha $(x,y)=(0,y)$. In tal caso si ha $f(0,y)=0$, da cui $\displaystyle\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
c) lungo la generica retta $y=mx$ si ha $(x,y)=(x,mx)$. In tal caso si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; \lim_{x\to0} \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} \;=\; \lim_{x\to0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} \;=\lim_{x\to0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} \;=\; 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \; .$$

Dunque, lungo qualsiasi retta passante per l'origine

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \;=\; 0 \; .$$

Se però ci muoviamo lungo la parabola $x=y^2$, simmetrica rispetto all'asse delle x, abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; \lim_{y\to0} \frac{y^2\cdot y^2}{(y^2)^2+y^4} \;=\; \lim_{y\to0} \frac{y^4}{2y^4} \;=\lim_{y\to0} \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2} \; .$$

Abbiamo dunque individuato una curva, lungo la quale, facendo tendere il punto P verso l'origine,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \; 0 \; .$$

Conseguentemente, la funzione non ha limite in $(0,0)$.

Esercizio 2)

Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\cdot \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \; .$$

Svolgimento: si è soliti riscrivere le variabili in coordinate polari ($x=\rho\cos(\theta)\;;y=\rho\sin(\theta)$), in modo tale che il limite, per $(x,y)\to(0,0)$, si trasformi nel limite per $\rho\to0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\cdot \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \;=\; \lim_{\rho\to0} \left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2}\right)\cdot \sin\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2}\right) \;=$$
$$=\; \lim_{\rho\to0} \left[\cos^2\theta\cdot\sin(\cos^2\theta)\right] \;=\; \cos^2\theta\cdot\sin(\cos^2\theta) \; .$$

Il limite, dipendendo da θ, varia a seconda dell'angolo con cui $(x, y) \to (0, 0)$.

Ad esempio, per $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{\rho \to 0} f(\rho, \theta) = 0$; per $\theta = 0$, $\lim_{\rho \to 0} f(\rho, \theta) = \sin 1$.

La funzione non ammette limite.

Esercizio 3)

Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\log(x^2+y^2+1)} \ .$$

Svolgimento:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\log(x^2+y^2+1)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho(\cos\theta - \sin\theta)}{\log(\rho^2+1)} \ .$$

Dalla teoria dei polinomi di Taylor sappiamo che

$$\log(\rho^2+1) = \rho^2 + o(\rho^3) \ ;$$

quindi

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho(\cos\theta - \sin\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho}(\cos\theta - \sin\theta) \ .$$

Anche in questo caso, il limite dipende da θ:

se $\cos\theta = \sin\theta \quad (\theta = \frac{\pi}{4})$, allora $\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} 0 = 0$;

se $\theta = 0$, allora $\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} = +\infty$.

La funzione non ammette limite.

Esercizio 4)

Studiare la continuità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \ .$$

Svolgimento: se $(x, y) \neq (0, 0)$, cioè se $\rho \neq 0$,

$$f(\rho,\theta) = \rho^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\cdot \sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = \rho^2 \cos 2\theta \cdot \sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \ .$$

Poiché

$$0 \leq |f(\rho,\theta)| = \rho^2|\cos 2\theta| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right| \leq \rho^2 \ ,$$

allora

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) = 0 \ .$$

La funzione è continua in $(0, 0)$.

Esercizio 5)

Studiare la continuità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} |\,|x|-|y|\,|\; e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad .$$

Svolgimento: per le proprietà dei moduli, si ha

$$|\,|x|-|y|\,| \;\leq\; |x-y| \;\leq\; |x|+|y| \;;$$

per cui

$$|f(x,y)| \;\leq\; (|x|+|y|)\, e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} \;=\; \rho\,(|\cos\theta|+|\sin\theta|)\, e^{\frac{-1}{\rho^2}} \;\leq\; 2\rho e^{\frac{-1}{\rho^2}}$$

e, conseguentemente,

$$0 \;\leq\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \;\leq\; \lim_{\rho\to 0} 2\rho e^{\frac{-1}{\rho^2}} \;=\; 0 \;,$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; 0 \;=\; f(0,0) \;.$$

Ne segue che $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$.

Per studiare la differenziabilità, dobbiamo verificare che

$$\Delta f - \;df \;=\; o(\rho) \;,$$

cioè

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f - \;df}{\rho} \;=\; 0 \;,$$

cioè, ancora,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f - [f_x(0,0)\;dx + f_y(0,0)\;dy]}{\rho} \;=\; 0 \;.$$

Si ha

$$f_x(0,0) \;=\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x| e^{\frac{-1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0} (\pm 1) e^{\frac{-1}{(\Delta x)^2}} \;=\; 0 \;;$$

$$f_y(0,0) \;=\; \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} \;=\; \lim_{\Delta y\to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} e^{\frac{-1}{(\Delta y)^2}} \;=\; 0 \;.$$

Conseguentemente, $df(0,0)=0$.

Calcoliamo allora

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f}{\rho} \;=\; \lim_{\rho\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\rho} \;=\; \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\; ||\cos\theta|-|\sin\theta||\; e^{\frac{-1}{\rho^2}}}{\rho} \;\leq\; \lim_{\rho\to 0} 2e^{\frac{-1}{\rho^2}} \;=\; 0 \;.$$

Segue che la $f(x,y)$ è differenziabile nell'origine. Il piano tangente nell'origine alla superficie grafico della funzione ha equazione

$$z = f(0,0) + f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\cdot y$$

cioè

$$z = 0 \;.$$

Esercizio 6)

Data la funzione

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \;,$$

calcolarne le derivate parziali in $(0,0)$. $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$? È differenziabile in $(0,0)$?

Svolgimento:

$$f_x(0,0) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} \;=\; 0 \;.$$

Analogamente:

$$f_y(0,0) \;=\; 0 \;.$$

Nonostante l'esistenza di $f_x(0,0)$ e di $f_y(0,0)$, $f(x,y)$ non è però continua in $(0,0)$. Infatti, consideriamo la successione di punti

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow_{n\to+\infty} (0,0) \;.$$

Si ha

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \;=\; \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}\right)^2} \;=\; \frac{1}{n^8} \cdot \frac{n^8}{4} \;=\; \frac{1}{4}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \;=\; \frac{1}{4} \;\neq\; 0 \;=\; f(0,0) \;.$$

Alternativamente, si può procedere calcolando il limite, per $(x,y) \to (0,0)$, lungo la curva $y = x^2$.

Si noti che la funzione ammette in $(0,0)$ derivate direzionali lungo qualsiasi direzione. Infatti, indicati con α e β i coseni direttori della retta lungo la quale si vuole derivare:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\vec{r}}\Big|_{P=(0,0)} \;&=\; \lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0,0)}{t} \;= \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\alpha^2 t^2 \beta t}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2}\right]^2 \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\alpha^2 \beta t^3}{(\alpha^4 t^2 + \beta^2) t^2}\right]^2 \;= \\ &= \lim_{t\to 0} t \cdot \lim_{t\to 0} \left[\frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^4 t^2 + \beta^2}\right]^2 \;= 0 \cdot \frac{\alpha^4 \beta^2}{\beta^2} \;=\; 0 \end{aligned}$$

purché $\beta \neq 0$, cioè per ogni direzione diversa da quella lungo l'asse delle x, per la quale la derivata è comunque già stata calcolata:

$$f_x(0,0) \;=\; 0 \;.$$

Non essendo continua, la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Verifichiamo, in ogni caso, come utile esercizio, la differenziabilità di $f(x,y)$ in modo diretto, cioè calcolando il limite

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f - \, df}{\rho} \;.$$

Notando che

$$df(0,0) \;=\; f_x(0,0)\,dx + f_y(0,0)\,dy \;=\; 0 \qquad ; \qquad f(0,0) = 0 \;,$$

si ha (riportando il quoziente in coordinate cartesiane)

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f - \, df}{\rho} \;&==\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \;= \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \;. \end{aligned}$$

a) Se $(x,y) \to (0,0)$ lungo una generica retta non verticale $y = mx$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{|x|\sqrt{m^2+1}} \cdot \left(\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} \right)^2 \right] =$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{m^2|x|}{\sqrt{m^2+1}(m^2+x^2)^2} \right] = 0 \qquad \forall m \in I\!R \; .$$

b) Lungo l'asse delle y $(x = 0)$, $f(x,y) = 0$.
Di conseguenza, lungo tale asse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \; .$$

c) Se però il punto $P = (x,y)$ si muove lungo la parabola $y = x^2$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+x^4}} \cdot \left(\frac{x^4}{2x^4} \right)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = +\infty \; .$$

Esiste dunque una curva lunga la quale

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f - df}{\rho} \neq 0 \; ,$$

da cui segue, come previsto, che $f(x,y)$ non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 7)

Data la funzione

$$f(x,y) = |x|e^y = \begin{cases} xe^y & \text{se } x \geq 0 \\ -xe^y & \text{se } x < 0 \end{cases} \; ,$$

calcolarne le derivate parziali miste f_{xy} e f_{yx}.

Svolgimento: si ha

$$f_x(x,y) = \begin{cases} e^y & \text{se } x > 0 \\ -e^y & \text{se } x < 0 \end{cases} \; ;$$

$$f_y(x,y) = |x|e^y \; ;$$

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} e^y & \text{se } x > 0 \\ -e^y & \text{se } x < 0 \end{cases} \; ;$$

$$f_{yx}(x,y) = \begin{cases} e^y & \text{se } x > 0 \\ -e^y & \text{se } x < 0 \end{cases} \; .$$

Esercizio 8)

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \; ,$$

si calcolino $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.

Svolgimento:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0 \; ;$$

$$f_y(0,0) = 0;$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y \left[\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)2x}{(x^2+y^2)^2}\right] = \\ &= y \left[\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right] \; ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= x \left[\frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-(x^2y-y^3)2y}{(x^2+y^2)^2}\right] = \\ &= x \left[\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right] \; ; \end{aligned}$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^5} = -1 \; ;$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^5} = 1 \; .$$

Segue che $f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$.

Questo vuol dire, per il Teorema di Schwarz, che almeno una delle due derivate miste f_{xy} e f_{yx} non è continua in $(0,0)$.

Anche se non richiesto dall'esercizio, ma per completezza, verifichiamo direttamente l'ultima affermazione.

È facile calcolare le derivate f_{xy} e f_{yx} nei punti $(x,y) \neq (0,0)$, per mezzo delle usuali regole di derivazione parziale e verificare che, in tali punti, esse coincidono:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ -1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases} ,$$

$$f_{yx}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases} ,$$

Sarà quindi sufficiente calcolare il limite di una delle due per conoscere il valore anche dell'altro limite. In coordinate polari

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y) &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^6(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^4\theta+10\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)}{\rho^6} = \\ &= \lim_{\rho\to 0} (\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^4\theta+10\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta) \; . \end{aligned}$$

Questo limite dipende dall'angolo θ, cioè dalla direzione lungo la quale il punto $(x,y)\to(0,0)$.

Pertanto la f_{xy} e, analogamente, la f_{yx}, non sono continue in $(0,0)$, come previsto.

Esercizio 9)

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases} ,$$

stabilire se sia differenziabile.

Svolgimento: poiché la funzione è il quoziente di due polinomi, essa risulta C^∞ (e quindi differenziabile) in ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$.

Occorre studiare la differenziabilità solo nell'origine.

$$f_x(0,0) \ = \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \ = \ 0 \ = \ f_y(0,0) \ .$$

Quindi

$$df(0,0) \ = \ f_x(0,0)\ dx + f_y(0,0)\ dy \ = \ 0 \ .$$

Segue che

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f - \ df}{\rho} \ = \ = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho} \ = \ \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x,y)}{\rho} \ = \\ = \ \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^3} \ = \ \cos\theta \sin\theta \ .$$

Poiché il limite dipende dall'angolo θ, in generale

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f - \ df}{\rho} \ \neq \ 0$$

e la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Questo implica che $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ non sono continue in $(0,0)$.

Infatti, per $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f_x(x,y) \ = \ y \left[\frac{2x(x^2+y^2) - 2x^3}{(x^2+y^2)^2} \right] \ = \ \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \ ,$$

da cui

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \ f_x(x,y) \ = \ \lim_{\rho \to 0} \frac{2\rho^4 \cos\theta \sin^3\theta}{\rho^4} \ = \ 2\cos\theta \sin^3\theta \ .$$

Ad esempio, per $\theta = \frac{\pi}{4}$,

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \ f_x(x,y) \ = \ \frac{1}{2} \ \neq \ f_x(0,0) \ = \ 0 \ .$$

Analogamente per $f_y(x,y)$.

Si noti, infine, che, per ogni direzione $\vec{r} = (\alpha, \beta)$, si ha

$$\frac{df}{d\vec{r}}\Big|_{P=(0,0)} \ = \ \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) \ - \ f(0,0)}{t} \ = \ \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\alpha^2 t^2 \beta t}{(\alpha^2+\beta^2)t^2}}{t} \ = \\ = \ \lim_{t \to 0} \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \ = \ \alpha^2 \beta$$

(si ricordi che i coseni direttori sono tali che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$).

Ma

$$\frac{df}{d\vec{r}}\Big|_{P=(0,0)} \ = \ \alpha^2\beta \ \neq \ \alpha f_x(0,0) + \beta f_y(0,0) \ = \ 0 \qquad \forall \alpha, \beta \neq 0 \ .$$

Esercizio 10)

Data la funzione

$$f(x,y) \ = \ x\sqrt{x^2 - y} \ ,$$

calcolare

$$\frac{df}{d\vec{r}} \quad \text{nel punto} \quad P_0 = (2,1)$$

lungo la direzione parallela alla retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Svolgimento: per la retta data si hanno i coseni direttori

$$(\alpha, \beta) \ = \ \left(\cos\frac{\pi}{6}\ ,\ \sin\frac{\pi}{6}\right) \ = \ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right) \ .$$

Poiché

$$f_x(x,y) \ = \ \sqrt{x^2-y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y}} \ ;$$

$$f_y(x,y) \ = \ \frac{-x}{2\sqrt{x^2-y}} \ ;$$

le derivate parziali prime sono continue in P_0; quindi si può scrivere

$$\frac{df}{d\vec{r}}\Big|_{P_0} \ = \ \alpha f_x(P_0) \ + \ \beta f_y(P_0) \ = \ \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}\right] \ + \ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \ =$$

$$= \ \frac{7}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ = \ \frac{21-\sqrt{3}}{6} \ .$$

Esercizio 11)

Esempio di funzione tale che le derivate seconde miste coincidono dappertutto, ma che non soddisfa il Teorema di Schwarz dappertutto.

Svolgimento: La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è definita su tutto il piano. È facile verificare, in coordinate cartesiane, che la funzione è continua su tutto $I\!R^2$. Come utile esercizio, verifichiamo la continuità in ogni punto dell'asse delle y, per mezzo delle coordinate polari decentrate.

Consideriamo dunque un generico punto $P_0 = (0, y_0)$. Ovviamente, poiché $f(0,y) = 0 \ \ \forall y \in I\!R$, allora

$$\lim_{y\to y_0} f(0,y) \ = \ f(0,y_0) \ = \ 0 \ .$$

Passando in coordinate polari decentrate, abbiamo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$$

e la funzione può essere riscritta, in ogni punto non appartenente all'asse delle y, nella forma

$$f(\rho,\theta) = \rho^2\cos^2\theta \cdot (y_0 + \rho\sin\theta)\cdot \sin\left(\frac{1}{\rho\cos\theta}\right) \ .$$

Poiché

$$|f(\rho,\theta)| = \left|\rho^2\cos^2\theta\cdot(y_0+\rho\sin\theta)\cdot\sin\left(\frac{1}{\rho\cos\theta}\right)\right| \ \leq \ \rho^2(|y_0|+\rho) \to_{\rho\to 0} 0 \ ,$$

segue che

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) \ = \ 0 \ ,$$

da cui la continuità in ogni punto dell'asse delle y.

In tali punti, inoltre,

$$f_x(0,y) \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} \ = \ \lim_{x\to 0} \ xy\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ = \ 0 \quad ,$$

mentre, ovviamente,

$$f_y(0,y) \ = \ 0$$

e pertanto

$$f_x(x,y) \ = \ \begin{cases} y\left[2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e

$$f_y(x,y) \ = \ \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \ .$$

Analogamente si determina

$$f_{xy}(x,y) \ = \ \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \ ,$$

mentre

$$f_{yx}(x,y) \ = \ \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \ = \ \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ = \ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \ .$$

Le funzioni f_{xy} e f_{yx}, benché coincidano in ogni punto del piano e, in particolare, lungo l'asse delle y, non sono ivi continue. Infatti, come noto, il limite

$$\lim_{x\to 0}\left[2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

non esiste.

L'esercizio non contraddice il teorema di Schwarz, il quale rappresenta una condizione solo sufficiente per l'eguaglianza delle derivate miste.

Esercizio 12)

Soluzione dell'Esercizio n. 14 p. 355 del libro "Bramanti, Pagani, Salsa - Matematica":
Dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

non esiste.

Svolgimento: la funzione ammette limite lungo qualsiasi retta passante per l'origine. Infatti:
a) se $y = mx$,

$$f(x,mx) \ = \ \frac{mx^3}{x^2(m^2+x^2)} \ = \ \frac{mx}{(m^2+x^2)} \ \to_{x\to 0} \ 0 \qquad \forall m\in I\!R \ ;$$

b) se $x = 0$,

$$f(0,y) \ = \ 0 \ \to_{x\to 0} \ 0 \ .$$

È però sufficiente scegliere una particolare curva, quale $y = x^2$, per scoprire che la funzione non ha limite nell'origine. Infatti:

$$f(x, x^2) \;=\; \frac{x^4}{x^4 + x^4} \;=\; \frac{1}{2} \;\to_{x\to 0}\; \frac{1}{2}\ .$$

Anche se non richiesto, possiamo, come utile esercizio, stabilire quali siano le curve $|y| = |x|^\alpha$ lungo le quali la funzione ha un limite diverso da zero.

Se consideriamo $y > 0$, prendiamo la curva $y = |x|^\alpha \quad ; \quad \alpha > 0$.

Se consideriamo $y < 0$, prendiamo la curva $y = -|x|^\alpha \quad ; \quad \alpha > 0$.

Si ha

$$f(x, \pm|x|^\alpha) \;=\; \frac{\pm x^2 \cdot |x|^\alpha}{x^4 + |x|^{2\alpha}} \;=\; \frac{\pm|x|^{2+\alpha}}{x^4 + |x|^{2\alpha}}\ .$$

Si presentano così vari casi:

se $\alpha > 2$, allora $|x|^{2\alpha} = o(x^4)$ e quindi

$$f(x, \pm|x|^\alpha) \;\sim\; \frac{\pm|x|^{2+\alpha}}{x^4} \;=\; \pm|x|^{\alpha-2} \;\to_{x\to 0}\; 0\ .$$

Se $\alpha = 2$, abbiamo il caso già studiato:

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) \;=\; \frac{1}{2}\ .$$

Se $0 < \alpha < 2$, allora $x^4 = \ o(|x|^{2\alpha})$, da cui

$$f(x, \pm|x|^\alpha) \;\sim\; \frac{\pm|x|^{2+\alpha}}{|x|^{2\alpha}} \;=\; \pm|x|^{2-\alpha} \;\to_{x\to 0}\; 0\ .$$

Dunque, la funzione ammette limite nullo non solo lungo qualsiasi retta passante per l'origine, ma anche lungo qualsiasi curva monomiale, a parte $y = x^2$.

Infine, studiamo la continuità della funzione per mezzo delle coordinate polari:

$$f(\rho, \theta) \;=\; \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2(\rho^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta)} \;=\; \frac{\rho \cos^2\theta \sin\theta}{\sin^2\theta(\rho^2 \frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta} + 1)}\ .$$

$$|f(\rho, \theta)| \;\le\; \frac{\rho|\cos^2\theta \sin\theta|}{\sin^2\theta} \;=\; \rho \cdot \frac{\cos^2\theta}{|\sin\theta|}\ .$$

È evidente che, se $\sin\theta$, mentre ρ tende a 0, tende anch'esso a 0, ci troviamo davanti a una forma indeterminata. Potrebbe quidi accadere che la funzione non abbia sempre lo stesso limite e che quindi non sia continua. In generale, se il fattore dipendente da θ non risulta limitato (come in questo caso), si presenta un caso di indeterminazione.

Se, ad esempio, i punti si muovono lungo la curva $\rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$, si ha

$$f(\rho(\theta), \theta) \;=\; \frac{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \cos^2\theta \sin\theta}{\sin^2\theta \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} \cdot \frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta} + 1\right)} \;=\; \frac{1}{2} \;\to_{\rho\to 0}\; \frac{1}{2}\ .$$

Si osservi che la curva $\rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ è l'espressione in coordinate polari della curva $y = x^2$.

Esercizio 13)

Soluzione dell'Esercizio n. 15 pag. 356 del libro "Bramanti, Pagani, Salsa - Matematica":
Dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$$

non esiste.

Svolgimento: la funzione

$$f(x,y) \;=\; \frac{x^2+y^2}{x}$$

non è definita per $x=0$. Dovremo quindi calcolare il limite in ogni punto dell'asse delle y. Poiché

$$f(x,y) \;=\; x+\frac{y^2}{x} \;,$$

si ha, per $y \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,y) \;=\; \frac{y^2}{0^+} \;=\; +\infty \;;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x,y) \;=\; \frac{y^2}{0^-} \;=\; -\infty \;.$$

Non esiste, dunque, il limite in alcun punto $(0,y)$; $y \neq 0$.

Se invece $y=0$, dobbiamo calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x+\frac{y^2}{x}\right] \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} \;.$$

È qui evidente che il limite dipende dalla curva lungo la quale il punto tende all'origine.

Infatti, se $y=mx$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) \;=\; \lim_{x\to 0} m^2x \;=\; 0 \quad \forall m \in I\!R \;.$$

Mouvendoci però lungo una curva di equazione $y=|x|^\alpha$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} f(x,|x|^\alpha) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{2\alpha}}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \left(\pm|x|^{2\alpha-1}\right) \;.$$

Se $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,|x|^\alpha) \;=\; 0 \;.$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,\sqrt{|x|}) \;=\; 1 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x,\sqrt{|x|}) \;=\; -1 \;.$$

Se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} |f(x,|x|^\alpha)| \;=\; +\infty \;.$$

La funzione, dunque, non ammette limite neanche nell'origine.

In coordinate polari:

$$f(\rho,\theta) \;=\; \frac{\rho^2}{\rho\cos\theta} \;=\; \frac{\rho}{\cos\theta} \;.$$

Come nell'esercizio precedente, il fattore dipendente da θ è illimitato. Dunque si possono avere casi di indeterminazione. Se, ad esempio, ci muoviamo lungo la curva $\rho = \cos\theta$ (corrispondente, in coordinate polari, alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-x=0$, cioè, in forma esplicita, $y=\pm\sqrt{x-x^2}$, che, per $x\to 0$, è approssimata dalla curva $y=\pm\sqrt{x}$: confrontare questa osservazione con i limiti della funzione in coordinate cartesiane), avremo

$$f(\rho(\theta),\theta) \;=\; \frac{\cos\theta}{\cos\theta} \;=\; 1 \;\to_{\rho\to 0}\; 1 \;,$$

mentre, lungo una qulasiasi curva tale che $\cos\theta$ non tenda a zero al tenere di ρ a zero, come ad esempio la curva di equazione $\theta = cost \;\neq \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) \;=\; 0 \;.$$