È utile ricordare inoltre un'altra situazione in cui le **5** [**6**] sono sufficienti per l'esattezza. Ce ne siamo occupati in $\boxed{108}$.**T8**: riguarda le forme positivamente omogenee.

Possiamo riformulare quel risultato nel modo seguente

PROPOSIZIONE 3 *Se X, Y, Z sono positivamente omogenee di grado $\alpha \neq -1$ in un aperto conico Ω di $\mathbb{R}^3$ e in tale aperto verificano le condizioni*

$$X_y = Y_x\,, \qquad X_z = Z_x \qquad e \qquad Y_z = Z_y\,,$$

allora la forma $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è esatta in Ω e

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\alpha+1}\left[x\,X(x,y,z) + y\,Y(x,y,z) + z\,Z(x,y,z)\right]$$

ne è una primitiva.

Un risultato del tutto analogo si ha in $\mathbb{R}^2$ per una forma del tipo $X(x,y)dx + Y(x,y)dy$ con X e Y positivamente omogenee di grado $\alpha \neq -1$; se è verificata la condizione [6] $X_y = Y_x$, una primitiva è

$$F(x,y) = \frac{1}{\alpha+1}\left[x\,X(x,y) + y\,Y(x,y)\right].$$

A completamento dei risultati ora stabiliti, proviamo, con un esempio, che le condizioni **6** [**5**] **non** sono sufficienti da sole a garantire in generale l'esattezza.

CE1 La forma definita in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ da

15

$$X(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad Y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

verifica la **6**.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Possiamo tuttavia dimostrare che essa non è esatta in Ω. Basta far vedere che è violata la β) del Teorema 2.