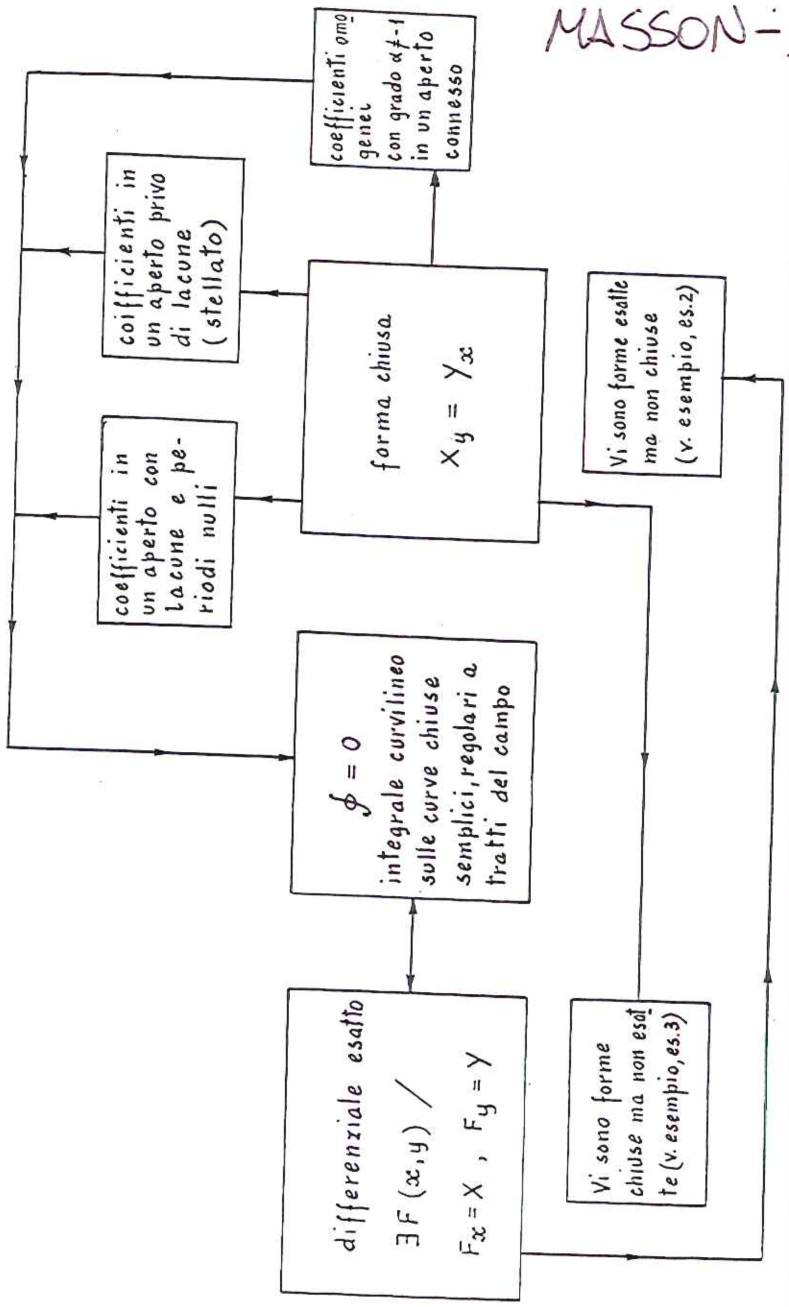
F. BONGIORNO - ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA II - MASSON - 1992



2. Esempio di forma esatta, ma non chiusa

Si consideri la funzione $F(x,y)$ di R^2

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si ha, ovviamente

$$F(x,0) = F(0,y) = 0 \qquad \forall x \in R, \quad \forall y \in R,$$

esistono pertanto, con valore nullo nell'origine le derivate parziali F_x, F_y della F; esse inoltre sono funzioni continue.
Infatti per la derivata F_x nell'origine si ha:

$$F_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x,0)-F(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 \ ;$$

mentre per la derivata F_x, fuori dall'origine, si ha:

$$F_x(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} .$$

Cosicche' $F_x(x,y)$ resta cosi' definita:

$$F_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La continuita' segue dal fatto che risulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F_x(x,y) = F_x(0,0) = 0.$$

Si ha infatti, passando alle coordinate polari

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F_x(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho \sin\theta \cdot \rho^4(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta \sin^2\theta - \sin^4\theta)}{\rho^4} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho \sin\theta\,(\cos 2\theta + \sin^2 2\theta) = 0,$$

risultando il limite uniforme rispetto a φ, per la limitatezza dell'espressione in φ.

Analogo risultato si trova per la derivata F_y, che risulta cosi' definita:

$$F_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cio' premesso, la forma

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy,$$

con

$$X(x,y) = F_x(x,y)$$
$$Y(x,y) = F_y(x,y),$$

risulta definita su R^2 con coefficienti continui.

Risulta inoltre *esatta*, per costruzione, avendo per primitive le funzioni $C^1(R^2)$ della famiglia $F(x,y)+c$.

Tale forma non e' pero' *chiusa* su R^2.

Mostriamo infatti che risulta:

$$X_y(0,0) \neq Y_x(0,0).$$

A titolo di curiosita', aggiungiamo che l'origine e' l'unico punto di R^2 ove le derivate suddette risultano diverse tra loro.

Si ha infatti:

$$X_y(0,0) = F_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{F_x(0,y) - F_x(0,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^5}{y^4} - 0}{y} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

$$Y_x(0,0) = F_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{F_y(x,0) - F_y(0,0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x} = \lim_{x\to 0}(1) = 1 .$$

Il fatto che la forma dell'esempio sia *esatta* su R^2 ma non *chiusa*, è legata al fatto che i suoi coefficienti X ed Y, benché continui su R^2, e dotati delle derivate parziali X_y ed Y_x, non ammettono tuttavia derivate X_y ed Y_x *continue*.

3. Esempio di forma chiusa ma non esatta

E' assegnata in $R^2-\{0\}$ la forma differenziale lineare

$$\frac{(y+x)dx + (y-x)dy}{x^2+y^2} .$$

I suoi coefficienti sono continui in $R^2-\{0\}$ e dotati delle derivate X_y ed Y_x continue ed uguali. Si ha infatti :

$$X_y = Y_x = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2} .$$

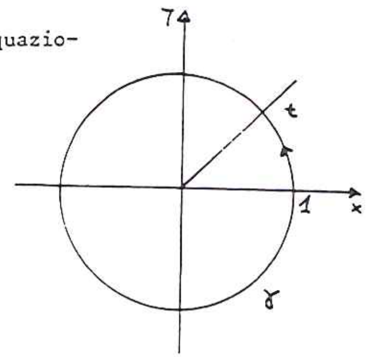
La forma è pertanto chiusa nel campo $R^2-\{0\}$.

Essa tuttavia non è esatta in tale aperto. Non risulta infatti nullo il suo integrale curvilineo sulla circonferenza γ con centro nell'origine e raggio unitario, pur contenuta nell'aperto, come mostra il calcolo seguente:

Per la circonferenza γ si hanno le equazioni parametriche :

$$x = \cos t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$y = \sin t$$

Si ha allora :



$$\int_\gamma X\,dx + Y\,dy =$$
$$= \int_0^{2\pi} \{(\sin t+\cos t)(-\sin t) +$$
$$+ (\sin t-\cos t)\cos t\}dt = \int_0^{2\pi} -dt = -2\pi$$