Note del corso di Analisi II del Dott. A. BERSANI
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 2000/2001

METODI DI TRASLAZIONE PER LE SERIE DI FOURIER

Consideriamo una funzione $g(x) \in G(\mathbb{R})$, ottenuta traslando una funzione $f(x)$ dispari lungo l'asse x di un fattore α. La $g(x)$ risulta essere dunque dispari rispetto a $x_0 = \alpha$.

Possiamo allora pensare di sviluppare la funzione in serie di Fourier di soli seni, purché centrata in $x_0 = \alpha$. Si avrà allora l'espansione formale in serie di Fourier, i cui coefficienti sono dati dalla espansione della funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin[(x-\alpha)k] = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin[kx - k\alpha] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k [\sin kx \cos k\alpha - \cos kx \sin k\alpha] \end{aligned}$$

(dove si sono sfruttate le ben note formule trigonometriche di sottrazione).

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[\sin kx \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos kx \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{B_{2m} \cos(2m\pi)\sin(2mx) - B_{2m-1}\sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right)\cos[(2m-1)x]\right\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{2m}(-1)^m \sin(2mx) - B_{2m-1}(-1)^{m-1}\cos[(2m-1)x]\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \{B_{2m}\sin(2mx) + B_{2m-1}\cos[(2m-1)x]\} \ . \end{aligned}$$

Se invece la funzione $g(x)$ è ottenuta traslando una funzione pari di un fattore α, essa risulta pari rispetto a $x_0 = \alpha$; potremo allora svilupparla formalmente nella serie

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[(x-\alpha)k] = \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\cos kx \cos k\alpha + \sin kx \sin k\alpha] \ .$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\cos kx \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \sin kx \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right] \;= \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{A_{2m}\left[\cos(m\pi)\cos(2mx)\right] + A_{2m-1}\sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left[(2m-1)x\right]\} = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \{A_{2m}\cos(2mx) - A_{2m-1}\sin\left[(2m-1)x\right]\} \; . \end{aligned}$$

In generale, data una funzione $g(x) \in G(I\!R)$, ottenuta traslando di un fattore α un'altra funzione $f(x)$, la cui serie di Fourier sia nota, avremo

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left[(x-\alpha)k\right] + B_k \sin\left[(x-\alpha)k\right] \;= \\ &= \; \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\cos kx \cos k\alpha + \sin kx \sin k\alpha\right] + B_k \left[\sin kx \cos k\alpha - \cos kx \sin k\alpha\right] \;= \\ &= \; \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos k\alpha - B_k \sin k\alpha\right] \cos kx + \left[A_k \sin k\alpha + B_k \cos k\alpha\right] \; \sin kx \; . \end{aligned}$$

Esempio.

La funzione

$$g(x) = \{\sin x\}_+ \;=\; \max\{0, \sin x\}$$

si ottiene traslando di $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la funzione pari

$$f(x) = \{\cos x\}_+ \;=\; \max\{0, \cos x\} \; .$$

Poiché, data la regolarità a tratti della $f(x)$, si ha l'eguaglianza

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{2}{\pi} \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} \cos(2kx) \;\; ,$$

allora

$$\begin{aligned} \max\{0, \sin x\} &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi} \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}(-1)^k \cos(2kx) \;\; = \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi} \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1} \;\; . \end{aligned}$$

ERRATA-CORRIGE DELLE SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI e1 - e19
[1], pp. 168-172

R(e1)

$$f_1(x) = \pi g_1(x) - 2l_1(x) - l_2(x) \ ;$$

$$f_1(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kx) + \frac{6}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m+1)x]}{(2m+1)^2} \ .$$

R(e2)

$$f_2(x) = \pi g_1(x) + l_2(x) \ ;$$

$$f_2(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kx) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m+1)x]}{(2m+1)^2} \ .$$

R(e4)

$$f_4(x) \sim \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m+1)x]}{(2m+1)^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[2(2m+1)x]}{(2m+1)^2} \ .$$

R(e6)

$$f_6(x) \sim \frac{13\pi}{16} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k^2} \left[2\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}k\pi\right) \right] \sin(kx) \ +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k^2} \left[2\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}k\pi\right) - 3 \right] \cos(kx) \ .$$

R(e9)

$$f_9(x) \sim \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)^2} \sin(2kx) \ .$$

R(e13)

$$f_{13}(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m+1)x]}{(2m+1)^2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[2(2m+1)x]}{(2m+1)^2} \ .$$

R(e16)

$$f_{16}(x) \sim \frac{M}{2\pi a}\left(1 - e^{-2\pi a}\right) + \frac{Ma}{\pi}\left(1 - e^{-2\pi a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{a^2+k^2} + \frac{M}{\pi}\left(1 - e^{-2\pi a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{a^2+k^2} \ .$$

Bibliografia

[1] A. Avantaggiati - Esercizi, Controesempi e Complementi di Analisi Matematica II - Edizioni Kappa - 1994