CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 11 gennaio 2001)
Compito A

A.1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^3 \frac{nx}{nx^2+\cos(nx)}\, dx$$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right)$$

A.2) Determinare, al variare di $\lambda \in I\!R$, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - \lambda y'' - 2y' + 2\lambda y = x$$

Per $\lambda \notin \{0\ ;\ \pm\sqrt{2}\}$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 e^{\lambda x} + \frac{1}{2\lambda^2}(\lambda x + 1).$$

Per $\lambda = \sqrt{2}$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 x e^{\sqrt{2}x} + C_3 e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{4}(\sqrt{2}x + 1).$$

Per $\lambda = -\sqrt{2}$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 x e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{4}(-\sqrt{2}x + 1).$$

Per $\lambda = 0$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 - \frac{1}{4}x^2.$$

A.3) Determinare il campo di definizione e quello di olomorfia della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^{2iz^2}+1}$$

Calcolare inoltre $f'(z)$.

$$I_{def} = I_{ol} = \{z \in \mathbf{C} \ \mid\ z \neq \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\pi\right)}\ ;\ k \in \mathbf{Z}\ \} =$$

$$= \{z \in \mathbf{C} \ \mid\ z \neq \pm\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\pi\right)};\ k \in I\!N_0\ ;\ z \neq \pm i\ \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\pi\right)}\ ;\ k \in I\!N\ \}.$$

$$f'(z) = \frac{-4ize^{2iz^2}}{(e^{2iz^2}+1)^2}$$

A.4) Determinare $f \in \mathcal{C}^1(I\!R)$ in modo che

$$\int_{+\partial T} f(x)\, dy\, dz + 2y\, dz\, dx + zx^3\, dx\, dy = 0$$

per ogni dominio regolare $T \subset I\!R^3$.

$$f(x) = -2x - \frac{x^4}{4}$$

A.5) (vecchio ordinamento)

Determinare $\alpha < 0$ in modo tale che il baricentro del cono limitato dalle superfici

$$z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad z = \alpha$$

cada nell'origine.

$$\alpha = -1$$

A.5 bis) (nuovo ordinamento)

Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica, tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x \in [\ 0\ ,\ \pi[\\ -x & \text{se } x \in [\ \pi\ ,\ 2\pi[\end{cases}$$

e la sua somma $S(x)$.

$$f(x) \ \sim\ \frac{1}{2}(1-\pi) - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos[(2m+1)x] + \frac{4\pi+2}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)}\sin[(2m+1)x]$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \neq k\pi \\ \frac{1}{2} & \text{per} \quad x = (2m+1)\pi \\ \frac{1-2\pi}{2} & \text{per} \quad x = 2m\pi \end{cases}$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 11 gennaio 2001)
Compito B

B.1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^4 \frac{n^2x^2}{n^2x^4 + \sin(nx)}\ dx$$

$$\frac{1}{4}$$

B.2) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - \lambda y'' - 3y' + 3\lambda y = x$$

Per $\lambda \notin \{0\ ;\ \pm\sqrt{3}\}$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 e^{\lambda x} + \frac{1}{3\lambda^2}(\lambda x + 1).$$

Per $\lambda = \sqrt{3}$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 x e^{\sqrt{3}x} + C_3 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{9}(\sqrt{3}x + 1).$$

Per $\lambda = -\sqrt{3}$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 x e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{9}(-\sqrt{3}x + 1).$$

Per $\lambda = 0$:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 - \frac{1}{6}x^2.$$

B.3)

Determinare il campo di definizione e quello di olomorfia della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^{2iz^2} - 1}$$

Calcolare inoltre $f'(z)$.

$$\begin{aligned} I_{def} &= I_{ol} = \{z \in \mathbf{C} \quad | \quad z \neq \sqrt{k\pi}\ ;\ k \in \mathbf{Z}\} = \\ &= \{z \in \mathbf{C} \quad | \quad z \neq \pm\sqrt{k\pi}\ ;\ k \in \mathbb{N}_0\ ;\ z \neq \pm i\ \sqrt{k\pi}\ ;\ k \in \mathbb{N}\ \}. \end{aligned}$$

$$f'(z) = \frac{-4ize^{2iz^2}}{(e^{2iz^2} - 1)^2}$$

B.4) Determinare $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ in modo che

$$\int_{+\partial T} 3x\ dy\ dz + f(y)\ dz\ dx + zy^2\ dx\ dy = 0$$

per ogni dominio regolare $T \subset \mathbb{R}^3$.

$$f(y) = -3y - \frac{y^3}{3}$$

B.5) (vecchio ordinamento)

Determinare $a > 0$ in modo tale che il baricentro del cono limitato dalle superfici

$$z = a - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad z = -1$$

cada nell'origine.

$$a = 3$$

B.5 bis) (nuovo ordinamento)

Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica, tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [\,0\ ,\ \pi[\\ -2 + x & \text{se } x \in [\,\pi\ ,\ 2\pi[\end{cases}$$

e la sua somma $S(x)$.

$$f(x) \ \sim \ \frac{1}{2}(\pi - 1) + \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos[(2m+1)x] + \frac{6 - 4\pi}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)} \sin[(2m+1)x]$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \neq k\pi \\ -\frac{1}{2} & \text{per} \quad x = (2m+1)\pi \\ \frac{2\pi - 1}{2} & \text{per} \quad x = 2m\pi \end{cases} .$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 29 gennaio 2001)
Compito A

A.1) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{e^x-1}} \qquad ; \qquad x \in \mathbb{R} \; .$$

Specificare, inoltre, un intervallo di convergenza totale.

CONV. SEMPLICE $\forall x > 0$;
CONV. ASSOLUTA $\forall x > \log 2$;
CONV. TOTALE in ogni intervallo $I_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \log(2\epsilon) \; ; \; \epsilon > 1\}$;
CONV. UNIFORME in ogni intervallo $I_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq h > 0\}$.

A.2) (v.o.) Detta S la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z il grafico della funzione

$$x = z + \alpha\sqrt{z} \qquad ; \qquad z \in [0,1]$$

determinare $\alpha \geq 0$ in modo che l'insieme T, delimitato da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$, abbia volume pari a π .

$$\alpha = \frac{-12 + 2\sqrt{111}}{15} \; .$$

A.2) (n.o.) Determinare le coordinate del baricentro del dominio piano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \quad ; \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \; \},$$

supposto che la sua densità di massa sia costante.

$$x_B = 1 \quad ; \; y_B = \frac{4}{3\pi} \; .$$

A.3) Discutere, al variare di $\alpha \geq 0$, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x(y-1)^\alpha \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\alpha \geq 1$ 1 soluzione (singolare) : $y \equiv 1$;

$0 < \alpha < 1$ 2 soluzioni : $\begin{cases} y_1 = 1 + \left[\dfrac{(1-\alpha)}{2} x^2\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \\ y_2 \equiv 1 \end{cases}$;

$\alpha = 0$ 1 soluzione : $y = \frac{x^2}{2} + 1$.

A.4) Calcolare

$$\int_\Sigma rot\vec{F} \cdot \vec{n} \; d\sigma$$

dove $\vec{F} = (xy, x^2+y^2, zx)$ e Σ è la porzione di $x^2+y^2+z^2 = 1$ contenuta in $x \geq 0$, $z \geq 0$.

$$\frac{2}{3}$$

A.5) Studiare la sommabilità delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

$$\sqrt{x}\cdot\cos(2x)\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\ \text{in}\ [1,+\infty[\quad ;\quad \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{\sin(x-1)}\ \text{in}\ [1,2]\quad ;\quad \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^3}\ \text{in}\ [0,1]\ .$$

Sommabile ; sommabile ; integrabile, ma non sommabile.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 29 gennaio 2001)
Compito B

B.1) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\log(x^2+1)}} \qquad ; \qquad x \in I\!R \ .$$

Specificare, inoltre, un intervallo di convergenza totale.

CONV. SEMPLICE $\forall x \neq 0$;
CONV. ASSOLUTA in $\{x > \sqrt{e-1}\} \cup \{x < -\sqrt{e-1}\}$;
CONV. TOTALE in ogni intervallo $I_\epsilon = \{x \in I\!R \mid |x| \geq \sqrt{e\epsilon - 1} \ ; \ \epsilon > 1\}$;
CONV. UNIFORME in ogni intervallo $I_h = \{x \in I\!R \mid |x| \geq h > 0\}$.

B.2) (v.o.) Detta S la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z il grafico della funzione

$$x = z + \alpha \ z^{\frac{1}{3}} \qquad ; \qquad z \in [0,1]$$

determinare $\alpha \geq 0$ in modo che l'insieme T, delimitato da S e dai piani $z=0$ e $z=1$, abbia volume pari a π .

$$\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{21} \ [3\sqrt{5} - \sqrt{143}] \ .$$

B.2) (n.o.) Determinare le coordinate del baricentro del dominio piano

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x \geq 0 \quad ; \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \ \},$$

supposto che la sua densità di massa sia costante.

$$x_B = \frac{4}{3\pi} \quad ; \ y_B = 1 \ .$$

B.3) Discutere, al variare di $\alpha \geq 0$, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 (y-2)^\alpha \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$\alpha \geq 1$ 1 soluzione (singolare) : $y \equiv 2$;

$0 < \alpha < 1$ 2 soluzioni : $\begin{cases} y_1 = 2 + \left[\dfrac{(1-\alpha)}{3} x^3\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \\ y_2 \equiv 2 \end{cases}$;

$\alpha = 0$ 1 soluzione : $y = \frac{x^3}{3} + 2$.

B.4) Calcolare

$$\int_\Sigma rot \vec{F} \cdot \vec{n} \ d\sigma$$

dove $\vec{F} = (xz, z^2 + y^2, zy)$ e Σ è la porzione di $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ contenuta in $x \geq 0$, $z \geq 0$.

$$-\frac{4}{3}\sqrt{2}\ .$$

B.5) Studiare la sommabilità delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

$$x^2 \cdot \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ in } [1,+\infty[\quad ; \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{e^{x-1}-1} \text{ in } [1,2] \quad ; \quad \frac{\log(1+x^{\frac{1}{3}})}{x^2} \text{ in } [0,1]\ .$$

Sommabile ; sommabile ; integrabile, ma non sommabile.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 19 febbraio 2001)
Compito A

A.1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{3x^3}{(1-x)^2} \ ,$$

calcolare la derivata $f^{(10)}(0)$. (*Suggerimento:* usare lo sviluppo di McLaurin di una funzione nota)

$$24 \cdot (10!)$$

A.2) Determinare il valore del parametro $\alpha \in I\!R$ per il quale la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 2(1+y')^2 \\ y(0) = \alpha \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

verifica $y(-3) = 5$.

$$y(x) = -\frac{1}{2}\log(1-2x) - x + \alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2}\log 7 + 2$$

A.3) Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica, tale che

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \in [\ 0\ ,\ \pi[\\ 1 - x & \text{se } x \in [\ \pi\ ,\ 2\pi[\end{cases}$$

e la sua somma $S(x)$.

Stabilire di conseguenza la somma della serie numerica

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \ \frac{1}{2m+1} \ .$$

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \ \frac{1}{(2m+1)^2} \ \cos[(2m+1)x] + \frac{4}{\pi}(\pi - 1)\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)x]}{(2m+1)}$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi \\ 0 & \text{se } x = (2m+1)\pi \\ 1 - \pi & \text{se } x = 2m\pi \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \ \frac{1}{(2m+1)} = \frac{\pi}{4}$$

A.4) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+\gamma} f(\log^2(x+y)) \ dx + f(\log^2(x+y)) \ dy \ ,$$

dove f è una funzione di classe $C^1([0,+\infty))$ e γ è la frontiera del dominio

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \ : \ 1 \leq (x-8)^2 + y^2 \leq 2\} \ .$$

0

A.5) Data la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \sin x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n}, 6\right] \end{cases} ,$$

calcolarne il limite puntuale e individuare un intervallo di convergenza uniforme.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \sin x & \text{se } x \in (0, 6] \end{cases}$$

Convergenza UNIFORME in ogni intervallo $[h, 6]$; $0 < h < 6$.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
(prova scritta di ANALISI MATEMATICA II - 19 febbraio 2001)
Compito B

B.1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{5x^5}{(1-x)^2} ,$$

calcolare la derivata $f^{(12)}(0)$. (*Suggerimento:* usare lo sviluppo di McLaurin di una funzione nota)

$$40 \cdot (12!)$$

B.2) Determinare il valore del parametro $\alpha \in I\!R$ per il quale la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 3(1+y')^2 \\ y(0) = \alpha \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

verifica $y(-5) = 3$.

$$y(x) = -\frac{1}{3}\log(1-3x) - x + \alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{3}\log 16 - 2$$

B.3) Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica, tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \in [\ 0 \ , \ \pi[\\ x-1 & \text{se } x \in [\ \pi \ , \ 2\pi[\end{cases}$$

e la sua somma $S(x)$.

Stabilire di conseguenza la somma della serie numerica

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \ \frac{1}{2m+1} \ .$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \ \cos[(2m-1)x] + \frac{4}{\pi}(1-\pi)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m-1)x]}{(2m-1)}$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi \\ 0 & \text{se } x = (2m+1)\pi \\ \pi - 1 & \text{quad se } x = 2m\pi \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \ \frac{1}{(2m+1)} = \frac{\pi}{4}$$

B.4) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+\gamma} f\left(\frac{1}{(x+y)^2}\right) \ dx + f\left(\frac{1}{(x+y)^2}\right) \ dy \ ,$$

dove f è una funzione di classe $C^1([0,+\infty))$ e γ è la frontiera del dominio

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \ : \ 1 \leq x^2 + (y-8)^2 \leq 4\} \ .$$

$$0$$

B.5) Data la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \\ \cos x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n}, 5\right] \end{cases} ,$$

calcolarne il limite puntuale e individuare un intervallo di convergenza uniforme.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } x \in (0, 5] \end{cases}$$

Convergenza UNIFORME in ogni intervallo $[h, 5]$; $0 < h < 5$.