

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
SEDE DISTACCATA DI LATINA
CORSO DI DIPLOMA-LAUREA IN INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO

a.a. 1999/2000 - PROVA SCRITTA DI ANALISI I
04/04/2000

COGNOME NOME

1.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \geq 0 ; \\ 1 + e^{1/x} & x < 0 \end{cases}$$

determinare

- a) l'insieme di definizione;
- b) l'insieme di continuità;
- c) l'insieme di derivabilità;
- d) gli intervalli di crescita e decrescenza;
- e) (fac.) disegnarne il grafico.

2.

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$$

3.

Calcolare

$$\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) e^{\sqrt{x}} dx.$$

SOLUZIONI 04/04/2000 - ANALISI I

1.

$$I_{def}(f) = I_{cont}(f) = I_{der}(f) = \mathbb{R}$$

$f(x)$ decrescente in \mathbb{R} ; $(0, 1)$ punto di flesso orizzontale.

2.

$$0$$

3.

$$2 \left[(5 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} - 2e \right]$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “LA SAPIENZA”
SEDE DISTACCATA DI LATINA
CORSO DI DIPLOMA-LAUREA IN INGEGNERIA per l’AMBIENTE e il TERRITORIO

a.a. 1999/2000 - PROVA SCRITTA DI ANALISI II
04/04/2000

COGNOME NOME

1.

Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x^2} y = e^{\frac{1}{x}} \arctan x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

2.

Determinare un aperto in cui la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \log y \cos x \, dx + \frac{\sin x}{y} \, dy$$

risulti esatta. Calcolarne la primitiva $F(x, y)$ tale che $F\left(\frac{\pi}{12}, 1\right) = 0$.

3.

Determinare tutte le radici quarte del numero complesso

$$z = -2 + 2\sqrt{3}i .$$

SOLUZIONI 04/04/2000 - ANALISI II

1.

$$y(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} \right]$$

2.

$$I_{def} = I_{es} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$$

$$F(x, y) = \log y \sin x$$

3.

$$z_0 = \sqrt[4]{4} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{4} \left[\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) \right] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = \sqrt[4]{4} \left[\cos \left(\frac{7}{6}\pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{6}\pi \right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{4} \left[\cos \left(\frac{5}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{3}\pi \right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “LA SAPIENZA”
SEDE DISTACCATA DI LATINA
CORSO DI DIPLOMA-LAUREA IN INGEGNERIA per l’AMBIENTE e il TERRITORIO

a.a. 1999/2000 - PROVA SCRITTA DI ANALISI II
14/04/2000

COGNOME NOME

1.

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\vec{V}(x, y) = \left(\log(x + y) + \frac{x}{x + y} \ ; \ \frac{x}{x + y} \right)$$

per spostare un corpo di massa unitaria dal punto $P \equiv (1, 0)$ e fargli compiere l'intero percorso lungo la circonferenza

$$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

in senso antiorario.

2.

Costruire l'integrale generale dell'Equazione Differenziale

$$y^{IV} - 2y''' + \lambda y'' = e^{-x}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Verificare che, per $\lambda > 1$, vi è una sola soluzione y_λ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\lambda(x) = 0$$

(**fac.:** cosa accade per $\lambda \leq 1$?).

3.

Calcolare

$$\iint_T \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} .$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “LA SAPIENZA”
SEDE DISTACCATA DI LATINA
CORSO DI DIPLOMA-LAUREA IN INGEGNERIA per l’AMBIENTE e il TERRITORIO

a.a. 1999/2000 - PROVA SCRITTA DI ANALISI I
14/04/2000

COGNOME **NOME**

1.

Determinare gli insiemi di definizione, di positività e negatività, di crescita e decrescita della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

(fac.) studiare il grafico di $f(x)$.

2.

Calcolare l’area del sottografico della funzione definita nell’esercizio 1), quando $x \in [4, 9]$.

3.

Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{(x-2)} (x-2) - \sin(x-2)}{(x-2)^\alpha}$$

per $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$.

4.

Date le successioni

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \quad ; \quad b_n = n \quad ,$$

a) verificare se siano monotone;

b) calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) .$$

SOLUZIONI 14/04/2000 - ANALISI I

1.

$$I_{def}(f) = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(x) > 0 \text{ in }]1, +\infty[\quad ; \quad f(x) < 0 \text{ in } [0, 1[.$$

$$f(x) \text{ decrescente in }]0, 1[\text{ e in }]1, +\infty[.$$

2.

$$4 + 2 \log 2$$

3.

$\alpha = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$\alpha = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad ; \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

4.

a) a_n, b_n strettamente crescenti;

b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = +\infty.$$

SOLUZIONI 14/04/2000 - ANALISI II

1.

0

2.

Per $\lambda > 1$ si ha

$$y_\lambda(x) = C_1 + C_2x + e^x \left[C_3 \cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda - 1}x) \right] + \frac{1}{3 + \lambda} e^{-x};$$

$$\bar{y}_\lambda(x) = \frac{1}{3 + \lambda} e^{-x}.$$

Per $\lambda = 1$ si ha

$$y_1(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{4}e^{-x};$$

$$\bar{y}_1(x) = \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Per $0 < \lambda < 1$ si ha

$$y_\lambda(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{[1 + \sqrt{1 - \lambda}]x} + C_4e^{[1 - \sqrt{1 - \lambda}]x} + \frac{1}{3 + \lambda} e^{-x};$$

$$\bar{y}_\lambda(x) = \frac{1}{3 + \lambda} e^{-x}.$$

Per $\lambda = 0$ si ha

$$y_0(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x};$$

$$\bar{y}_0(x) = \frac{1}{3}e^{-x}.$$

Per $\lambda < 0$, $\lambda \neq -3$, si ha

$$y_\lambda(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{[1 + \sqrt{1 - \lambda}]x} + C_4e^{[1 - \sqrt{1 - \lambda}]x} + \frac{1}{3 + \lambda} e^{-x};$$

$$\bar{y}_\lambda(x) = C_4e^{[1 - \sqrt{1 - \lambda}]x} + \frac{1}{3 + \lambda} e^{-x};$$

quindi ci sono infinite soluzioni.

Per $\lambda = -3$ si ha

$$y_{-3}(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{3x} + C_4e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x};$$

$$\bar{y}_{-3}(x) = C_4e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x};$$

quindi ci sono infinite soluzioni.

3.

8

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
SEDE DISTACCATA DI LATINA
CORSO DI DIPLOMA-LAUREA IN INGEGNERIA (SETTORE dell'INFORMAZIONE)

a.a. 1999/2000 - PROVA SCRITTA DI ANALISI I
12/06/2000

COGNOME NOME

CORSO DI DIPLOMA-LAUREA IN

1. Data la funzione

$$f(x) = \tan(\arcsin x)$$

- a) stabilirne l'insieme di definizione;
b) calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

c) studiarne gli intervalli di crescita e decrescenza, individuando eventuali punti di massimo o minimo relativo e/o assoluto;

d) (**fac.**) studiarne il grafico

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\arcsin x)}{x}$$

3. Calcolare

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

4. Determinare il carattere della successione

$$a_n = \frac{\binom{n}{n-1}}{n!}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
SEDE DISTACCATA DI LATINA
a.a. 1999/2000 - PROVA SCRITTA DI ANALISI I
12/09/2000

COGNOME NOME

CORSO DI DIPLOMA-LAUREA IN

1.

Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$$

(insieme di definizione; limiti; punti di discontinuità; crescita e decrescita; punti di minimo, massimo, flesso orizzontale; concavità e convessità; flessi obliqui; asintoti).

2.

Calcolare

$$\int_2^4 \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1} dx .$$

Ha senso calcolare

$$\int_2^0 \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1} dx \quad ?$$

3.

Determinare il carattere della successione

$$a_n = \frac{1}{\binom{n+2}{n}} - \frac{1}{\binom{n}{n-2}}$$