M 69. $\lim_{n\to\infty} n\left[1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^4\right]$

M 70. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^6+n^2-1}-n^2\right)$

F 71. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

D 72. $\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}$

F 73. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

M 74. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n}$

M 75. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}$

F 76. $\lim_{n\to\infty}\frac{10325n}{n^2-3}$

M 77. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^n$

D 78. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$

D 79. $\lim_{n\to\infty}\frac{10^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$

D 80* $\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right)$

D 81. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$

D 82. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{3n}{2n}}$

D 83. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{hn}{kn}}$

D 84. $\lim_{n\to\infty} n^\alpha A^{n^\beta}$

M 85. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2}}\right)$

M 86. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{-n}$

D 87. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$

Dire per quali valori reali di a esistono finiti i limiti

M 88. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+1}{n^a}\right)^n$

F 89. $\lim_{n\to\infty}(a^n+n^a)$

90. Dimostrare che, se a_n e b_n sono due successioni positive, risulta

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n+b_n}=\max\left\{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}\right\}$$

ogni volta che esistono i limiti a secondo membro.

91* Provare che, se $a_n \to L$, allora la successione $q_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ ha anch'essa limite L.

92. Si dimostri che risulta $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})$ non appena il secondo limite esiste.

93. Sia a_n una successione tale che $a_0=6$ e $1\le a_{n+1}\le\sqrt{a_n}$. Dimostrare che a_n ha limite e trovare il suo valore.

94* Dimostrare che l'equazione $x^7+x-\frac{1}{n}$ ha una sola soluzione reale x_n. Trovare il limite della successione x_n.

Esempio 1.8

Per ogni numero razionale positivo $r=\frac{k}{p}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right\}=r.$$

Se r è un intero positivo, si può applicare la formula del binomio:

$$n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right\}=\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}n^{1-k},$$

da cui segue subito

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right\}=\binom{r}{1}=r. \qquad [1.1]$$

Supponiamo ora $r=\frac{k}{p}$. Si ha per ogni β reale

$$\beta^p-1=(\beta-1)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{p-1}),$$

e, prendendo $\beta=\alpha^{k/p}$,

$$\alpha^{k/p}-1=\frac{\alpha^k-1}{1+\alpha^{k/p}+\ldots+\alpha^{k(p-1)/p}}.$$

Prendiamo ora $\alpha=1+\frac{1}{n}$ e moltiplichiamo per n; si ottiene

$$n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right\}=\frac{n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right\}}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^r+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r(p-1)}},$$

da cui, tenendo conto della [1.1] e del fatto che ognuno dei p addendi al denominatore tende a 1, si ottiene il risultato voluto. Osserviamo che il risultato resta vero per ogni valore reale di r (vedi più oltre, cap. 6, Esempio 2.2). ∎