

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1 DEL 9.2.2021

GIUSTIFICARE ADEGUATAMENTE OGNI PASSAGGIO

Esercizio 1 (10,5 PUNTI)

Data la funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right),$$

determinarne il dominio, il segno, le intersezioni con gli assi, gli asintoti, la derivata prima, gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di minimo e di massimo, relativi e assoluti. Stabilire inoltre il valore del limite della derivata nei punti di singolarità.

Esercizio 2 (10 PUNTI)

Determinare i valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ c \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \right] & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x = 0$.

Esercizio 3 (7 PUNTI)

Determinare le soluzioni dell'equazione

$$e^{2z} + 8ie^z - 16 = 0 \quad , \quad z \in \mathbf{C}.$$

Esercizio 4 (7 PUNTI)

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Esercizio 5 (7,5 PUNTI)

Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{\ln 4}^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$$

Esercizio 6 (6 PUNTI)

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = (1+x^2)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$