SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 3/9/2019

1) Equazione a variabili separabili

$a(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$b(y) = \frac{1}{y+1} \in C^{\infty}(-1, +\infty) \Rightarrow \exists!$ sol. (locale)

$\ni y_0 = 0$

$\nexists$ sol. singolari

integrale generale:

$$\cancel{\int \frac{dy}{y+1}} \quad \int (y+1)\, dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + y - \frac{x^3}{3} = 0 \Rightarrow 3y^2 + 6y - 2x^3 = 0$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 6x^3}}{3} = -1 \pm \frac{\sqrt{3 + 2x^3}}{\sqrt{3}}$$

Poiché $-1 - \frac{\sqrt{3+2x^3}}{\sqrt{3}} < 0$ (ma $y_0 = 0$) $\Rightarrow$ possiamo scegliere solo $y_1(x) = -1 + \sqrt{\frac{3+2x^3}{3}}$

Si osservi che la funzione risulta essere definita e di classe C^1 nell'intervallo $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$! 2

2) a) Per $x \to 0^+$, $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

~~NON~~ INTEGRABILE IN $(0,1]$

b) Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

NON INTEGRABILE in $[1,+\infty)$.

c) $$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \qquad \begin{pmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ t(0) = 1 \,;\, t(1) = e \end{pmatrix}$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \log\left[t+\sqrt{t^2-1}\right]_1^e$$

$$= \log\left[e+\sqrt{e^2-1}\right]$$

3) $$(i+z)^2 = \pm (z-1)^2$$

1° caso: $$(i+z)^2 = (z-1)^2$$

$$-1+2iz+\cancel{z^2} = \cancel{z^2}-2z+1$$

$$2z(i+1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = \frac{1}{i+1} = \frac{-i+1}{2}$$

2° caso:

$$\cancel{}(i+z) = -(z-1)^2$$

$$-1+2iz\cancel{+}z^2 = -z^2+2z-1$$

$$2z^2+2(i-1)z=0$$

$$z\left[z+(i-1)\right]=0$$

$$z_2=0 \quad ; \quad z_3=1-i$$

$\boxed{\text{N.B.: l'equazione algebrica ammette solo 3 soluzioni perché, svolgendo le potenze quarte, si riduce al grado 3: } (i+1)z^3-3z^2+(1-i)z=0}$

4)

$$a_n = n\left[\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right]$$

$$= n\left[\frac{1}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] \sim \frac{1}{3\sqrt{n}}$$

$\sum \frac{1}{3\sqrt{n}}$ diverge; quindi $\sum a_n$ diverge.

5) $I_{def} = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty - 0^+ + e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty - 0^- + e^{\frac{1}{0^-}} = -\infty + e^{-\infty} = -\infty$$

AS. VERT.: $x=0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right]$$

$$= 0 - 1 + \frac{e^{0^\pm}}{\pm\infty} = -1 = m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{x} - \cancel{x} + e^{\frac{1}{x}} + \cancel{x}\right]$$

$$= 0 + e^{0^\pm} = 1 = q$$

$\Rightarrow$ AS. OBLIQUO a $\pm\infty$:

$$\underline{y = -x + 1}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0 \quad \forall x \in I_{def}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

Poiché $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ ~~cresce~~ decresce in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

Tenuto conto dei limiti calcolati, f non ammette MAX. e MIN. REL. e ASS.

Anche se non richiesto, il grafico qualitativo di f è