SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1
del 7/2/19

$\boxed{\text{COMPITO A}}$

A_1

1) Tenuto conto che $x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ la EDO è definita in $(0, \pi)$.

Equazione lineare a coefficienti continui in $(0, \pi) \Rightarrow \exists!$ sol. $y \in C^1(0,\pi)$ (SOL. GLOBALE)

$$y(x) = e^{3\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \operatorname{cotg} t \, dt} \left[1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{-3\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \operatorname{cotg} s \, ds} \sin^4 t \, dt \right]$$

$$= e^{3 \log|\sin t| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{x}} \cdot \left[1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{-3 \log|\sin s| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{t}} \cdot \sin^4 t \, dt \right]$$

in $(0, \pi)$ $\sin x > 0$.

$$= e^{3 \log(\sin x)} \left[1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{-3 \log(\sin t)} \sin^4 t \, dt \right]$$

$$= \sin^3 x \left[1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{\cancel{\sin^3 t}} \sin^{\cancel{4}} t \, dt \right]$$

$$= \sin^3 x \left[1 - \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{x} \right] = \sin^3 x \, (1 - \cos x).$$

A_2

2) $$\int_0^{1/4} \frac{2x+5}{\sqrt{(3x-1)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2x+5}{|3x-1|}\,dx$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2x+5}{3x-1}\,dx = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{4}} \left[\frac{3x+\frac{15}{2}}{3x-1}\right]dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{4}} \left[\frac{3x-1+\frac{17}{2}}{3x-1}\right]dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[x+\frac{17}{6}\log(|3x-1|)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}+\frac{17}{6}\log\left(\left|-\frac{1}{4}\right|\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}-\frac{17}{3}\log 2\right].$$

3) $$x^2+y^2+i\,\mathrm{Im}(x+iy+i)+\mathrm{Re}(z^2+2iz-1)=0$$

$$x^2+y^2+i(y+1)+\mathrm{Re}(x^2-y^2+2ixy+2ix-2y-1)=0$$

$$x^2\cancel{+y^2}+i(y+1)+x^2\cancel{-y^2}-2y-1=0$$

A3

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 2x^2+2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+1=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

NO SOL. REALI

$\Rightarrow \nexists$ soluzioni.

4)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$$

Serie: $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{2n+1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$

La serie converge.

SI SAREBBE ANCHE POTUTO AFFERMARE CHE, POICHÉ Σa_n CONVERGE, ALLORA $a_n \rightarrow 0$.

5) I_{def}: $\begin{cases} \operatorname{sen} x \neq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi. \end{cases}$

La funzione è 2π-periodica.

La funzione è somma di funzioni dispari $\Rightarrow$ è DISPARI.

A4

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=1$$ f prolungabile per continuità in $x=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x}=\frac{x}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

f prolungabile per continuità in $x=0$.

La prolungata è

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0\\ \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{se } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).\\ 1 & \text{se } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\tilde{f}'(x)=f'(x)=\frac{\sin^2 x-\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tilde{f}'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\tilde{f}'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = 1$$

A_5

$\tilde{f}$ è derivabile in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

COMPITO B

B1

1) $x^2+y^2+i\,\mathrm{Re}(x+iy+1)+\mathrm{Im}(z^2+2z+1)=0$

$x^2+y^2+i(x+1)+\mathrm{Im}(x^2-y^2+2ixy+2x+2iy+1)=0$

$x^2+y^2+i(x+1)+(2xy+2y)=0$

$$\begin{cases} x=-1 \\ 1+y^2 - \cancel{2y}+\cancel{2y}=0 \end{cases}$$

impossibile in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \nexists$ soluzioni.

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}=0$

Serie:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{3n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}<1$$

$\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE.

SI SAREBBE ANCHE POTUTO AFFERMARE CHE, POICHE' Σa_n CONVERGE, ALLORA $a_n \to 0$.

3) $I_{dey}: \begin{cases} x \neq k\pi \\ \operatorname{sen} x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow I_{dey} = \{x \neq k\pi\}.$

B2

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in (0, \pi).$$

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

f NON è prolungabile in $x = \pi$

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x} = -\frac{x}{2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

f è prolungabile in $x = 0$.

La prolungata, definita in $[0, \pi)$, è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x} & \text{se } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

f(x) è periodica di periodo 2π.

f(x) è somma di funzioni dispari, quindi è dispari.

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - (\cos x - 1)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} \quad B_3$$

$\forall x \in (0, \pi)$.

$$\tilde{f}'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$\tilde{f}$ è derivabile in $[0, \pi)$.

4) ~~cotg~~ Tenuto conto che $x_0 = \frac{\pi}{2}$, allora la EDO è definita in $(0, \pi)$.

$\exists !$ sol. $y \in C^1(0, \pi)$. SOL. GLOBALE.

$$y(x) = e^{2\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \operatorname{cotg} t \, dt} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \operatorname{cotg} s \, ds} \cdot \sin^3 t \, dt + 1 \right]$$

$$= e^{2\log|\sin t|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{x}} \left[1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{-2\log|\sin s|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{t}} \sin^3 t \, dt \right]$$

$$= e^{2\log(\sin x)} \left[1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{-2\log(\sin t)} \sin^3 t \, dt \right]$$

perchè $\sin t > 0$ in $(0, \pi)$.

$$= \sin^2 x \left[1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{\cancel{\sin^2 t}} \sin^{\cancel{3}} t \, dt \right]$$

$$= \sin^2 x \left[1 - \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{x} \right] = \sin^2 x \, (1 - \cos x)$$

5) $$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x+4}{\sqrt{(2x-1)^2}} \, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x+4}{-(2x-1)} \, dx$$

$$= -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2x + \frac{8}{3}}{2x-1} \, dx = -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2x-1+\frac{11}{3}}{2x-1} \, dx$$

$$= -\frac{3}{2} \left[x + \frac{11}{6} \log(|2x-1|) \right]_0^{1/3}$$

$$= -\frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{11}{6} \log\left(\left| -\frac{1}{3} \right| \right) \right] = -\frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{11}{6} \log 3 \right]$$