SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI MAT. 1 del 7/2/22. 1

Equazione a variabili separabili.

$$A(x) = e^{2x} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$B(y) = \frac{1}{2y} \in C^{\infty}(\mathbb{R} - \{0\})$$

~~Dato che~~ Dato che $y_0 = \frac{1}{2} > 0$, la soluzione deve risultare sempre positiva.

$\exists!$ soluzione di tipo LOCALE.

$\nexists$ sol. singolari.

$\Rightarrow$ METODO DI SEPARAZIONE VARIABILI.

$$2y \cdot y' = e^{2x}$$

$$\int 2y\,dy = \int e^{2x}\,dx$$

$$y^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$y^2(0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y^2(x) = \frac{1}{4}\left(2e^{2x} - 1\right)$$

$y(x) > 0$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2e^{2x}-1}.$$

Affinché $y \in C^1 \Rightarrow 2e^{2x}-1 > 0$

$$\Rightarrow e^{2x} > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2.$$

La soluzione è definita in $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, +\infty\right)$.

---

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x \sin x}{4-\cos^2 x}\,dx$

$\cos x = t$

$dt = -\sin x\,dx$

$t(0) = 1;\ t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$= \int_1^0 \frac{-2t}{4-t^2}\,dt$$

$$= \ln|4-t^2|\Big|_1^0 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

3) $e^{z^2+2iz-1} = e^{0+i2k\pi}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ 3

$\Rightarrow z^2+2iz-1 = (z+i)^2 = 2k\pi i$.

$\Rightarrow z+i = \sqrt{2k\pi i}$

$$\Rightarrow z = -i + \sqrt{2k\pi i} = \begin{cases} -i + \sqrt{2k\pi}\sqrt{i} & \text{se } k \geq 0 \\ -i + \sqrt{2|k|\pi}\sqrt{-i} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -i \pm \sqrt{2k\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{se } k \geq 0 \\ -i \pm \sqrt{2|k|\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\left[x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] - \left[1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} + o(x^4)\right]}{x^2 \cdot x^2}$$ 4

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} + \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{24\cancel{x^4}}(1-3)\cancel{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

5)

a) Facendo riferimento all'esercizio 4, ponendo al posto di x, $\frac{1}{n}$

si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{1}{12}$.

b) Poiché $a_n \not\to 0$, la serie NON converge. Essendo la successione a_n almeno definitivamente negativa, allora $\sum a_n = -\infty$.

6) $D = \{x^2-1 > 0\} = \{x<-1\} \cup \{x>1\}$

$= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

6

$f(x)$ è pari: $f(-x) = \ln((-x)^2-1)$

$= \ln(x^2-1) = f(x)$

$f(x)=0 \iff x^2-1 = 1 \iff x = \pm\sqrt{2}$

~~Per x>0:~~ $f(x)>0 \iff x^2>2$

$\iff x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2}$

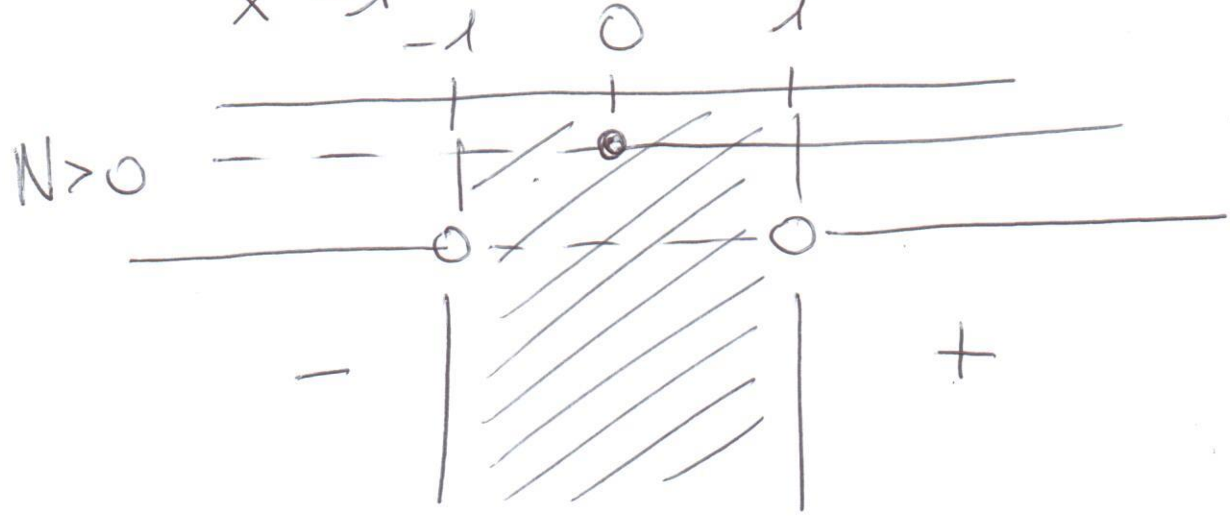
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to -1^-} f(x)$ (per simmetria)

~~lim~~ $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \ln(x^2) = 2\ln(|x|) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$

(andamento sublineare).

NO AS. OBLIQUI.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$



f decresce in $(-\infty, -1)$ e cresce in $(1, +\infty)$.

$\nexists$ MAX o MIN, REL. e ASS.

$$f''(x) = 2\left[\frac{x^2-1-x\,2x}{(x^2-1)^2}\right] = -2\left[\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right] < 0$$

$\forall x \in D$.

f concava in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$.

Grafico: