SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 12/6/2023

1) $\begin{cases} z+i\neq 0 \\ \bar{z}+i\neq 0 \end{cases} \Rightarrow z\neq \pm i$

poiché $|w|=|\bar{w}| \Rightarrow |z-i|=|\bar{z}+i|=|\overline{z-i}|$

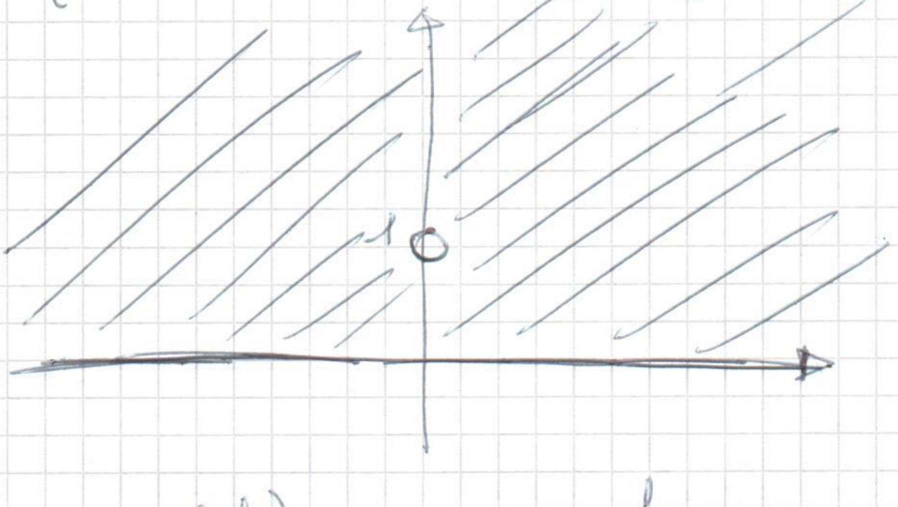
$|z+i|=|\bar{z}-i|=|\overline{z+i}|$

$\Rightarrow |(z-i)|^2 \leq |(z+i)|^2$

$\cancel{x^2}+(y-1)^2 \leq \cancel{x^2}+(y+1)^2$

Svolgendo, si ha $-2y \leq 2y \Rightarrow y\geq 0$

Ricordando che $z\neq \pm i \Rightarrow$ le soluzioni sono $\{(x,y) \text{ t.c. } y\geq 0\} - \{(0,1)\}$



2)

$$1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^4}$$

$$\Rightarrow \sum n^\alpha\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \approx \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^{4-\alpha}}$$

La serie converge per $4-\alpha>1 \Rightarrow \alpha<3$

diverge per $4-\alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha \geq 3$

3) $I_{def}=\{e^x-2\neq 0\}=\{x\neq \ln 2\}$

$\cap$ asse y: $f(0)=-2$

$\nexists \cap$ asse x perchè $e^x+1>0 \quad \forall x\in I_{def}$

Segno: $f(x)>0 \iff e^x>2 \iff x>\ln 2$.

$$\lim_{x\to \ln 2^{\pm}} f(x)=\frac{3}{0^{\pm}}=\pm\infty$$ AS. VERTICALE: $x=\ln 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$ AS. ORIZZONTALE a $+\infty$: $y=1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$$ AS. ORIZZONTALE a $-\infty$: $y=-\frac{1}{2}$

$$f(x)=1+\frac{3}{e^x-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-3e^x}{(e^x-2)^2}<0 \quad \forall x\in I_{def}$$

f decresce in $(-\infty,\ln 2)$ e in $(\ln 2,+\infty)$

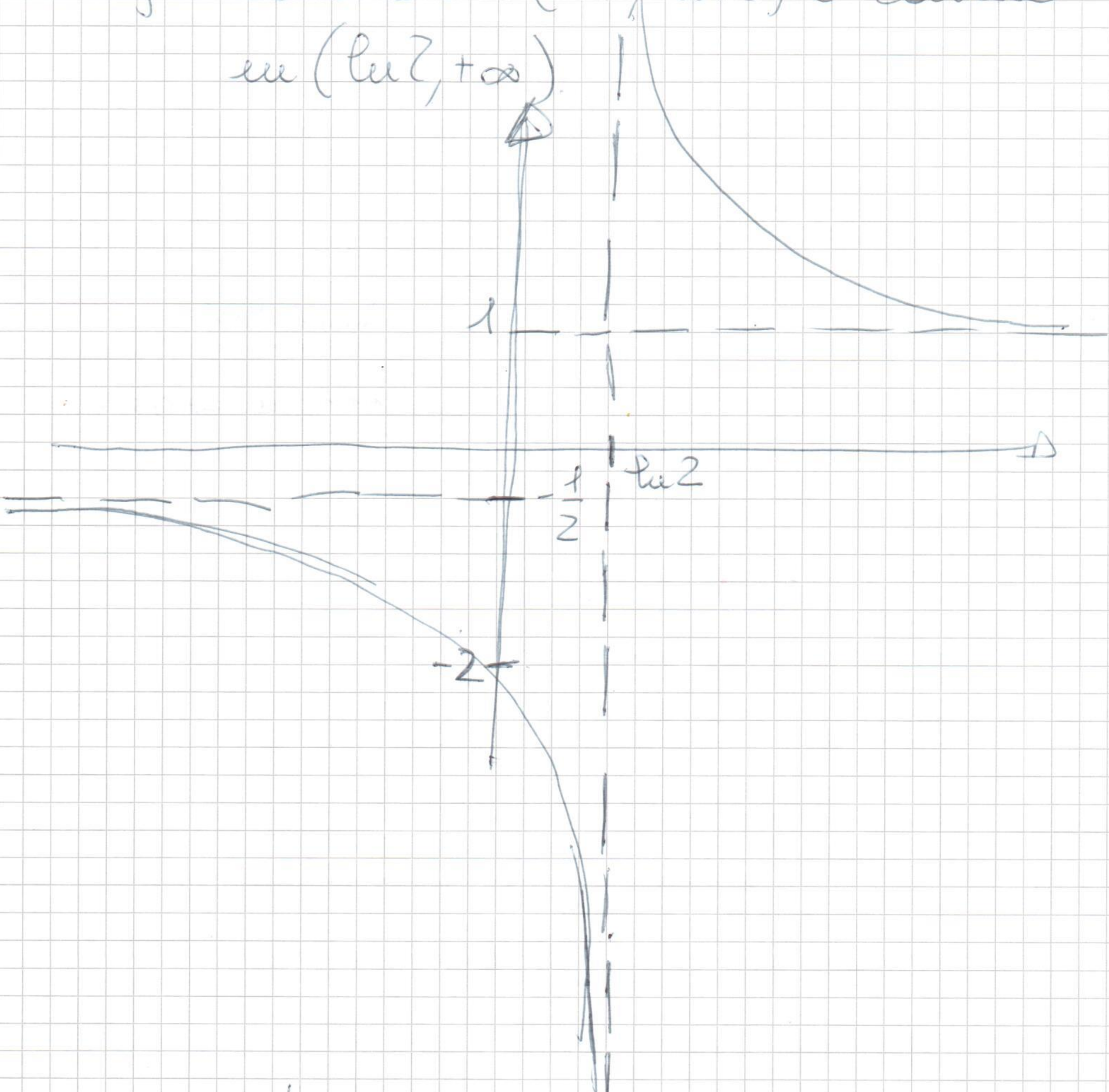
Tenuto conto dei limiti, la funzione non ammette MAX-MIN. REL. o ASS.

$$f''(x)=-3\left[\frac{e^x(e^x-2)^{\cancel{2}}-e^x\,2\cancel{(e^x-2)}e^x}{(e^x-2)^{\cancel{4}\,3}}\right]=$$

$$= \frac{-3e^x}{(e^x-2)^3}\left[e^x-2-2e^x\right] = \frac{3e^x(e^x+2)}{(e^x-2)^3} > 0$$

$\iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$.

f è concava in $(-\infty, \ln 2)$ e convessa in $(\ln 2, +\infty)$



Pertanto l'immagine è

$$R_f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

4) Data la $x_0=0$, l'equazione è definita in $I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. L'equazione è lineare omogenea; $a(x)=2x+\operatorname{tg}x\in C^\infty(I)$ (4)

$\Rightarrow \exists!$ sol. $y\in C^1(I)$ (sol. globale).

Considerando l'equazione a variabili separabili $y(x)\equiv 0$ sol. singolare soddisfa il primo problema di Cauchy.

Per il secondo problema:

$$y(x) = e^{+\int_0^x (2t+\operatorname{tg}t)\,dt}$$

$$= e^{\left[t^2-\ln|\cos t|\right]_0^x} = e^{x^2-\ln(\cos x)} = \frac{e^{x^2}}{\cos x}$$

In $I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x>0$

5) Per $x\to+\infty$

$$f(x) = \cancel{\frac{1}{x}}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\cancel{-\frac{1}{x}}\cancel{-\frac{1}{2x^2}}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=-\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^3}.$$

(f DEFINITIVAMENTE di segno costante (negativo))

La funzione $g(x) = -\frac{1}{2x^3}$ è integrabile (5)

a $+\infty$ $\Rightarrow$ f è integrabile, per il criterio del confronto.