SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 13/2/2020. (A1)

COMPITO A

1) Equazione omogenea associata:

$$\alpha^2+2\alpha+1=0 \implies \alpha_{1,2}=-1$$

$$\implies y_0(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$$

L'equazione non omogenea può essere risolta col metodo di sovrapposizione.
Si osserva subito che $\overline{y}_p(x)=2$ è soluzione particolare dell'equazione $y''+2y'+y=2$,

mentre, poiché $\alpha=-1$ è radice del polinomio caratteristico con $m_a=2$ $\implies$ la soluzione particolare, ottenibile col metodo di somiglianza, dell'equazione $y''+2y'+y=e^{-x}$

è $\overline{\overline{y}}_p(x)=Ax^2e^{-x}$ $\implies (\overline{\overline{y}}_p)'=A(2x-x^2)e^{-x}$

$$(\overline{\overline{y}}_p)''=A(x^2-4x+2)e^{-x}$$

Sostituendo nell'equazione:

$$A\left[\cancel{x^2}\cancel{-4x}+2+\cancel{4x}\cancel{-2x^2}\cancel{+x^2}\right]e^{-x}=e^{-x}$$

$$\implies A=\frac{1}{2}$$

Integrale generale:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + 2$$

$$y(0) = C_1 + 2 = 2 \implies C_1 = 0$$

$$\implies y(x) = C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + 2$$

$$y'(x) = C_2 (1-x) e^{-x} + \frac{1}{2}(2x - x^2) e^{-x}$$

$$y'(0) = \underline{C_2 = 0}$$

$\implies$ L'unico soluzione particolare del Problema di Cauchy è

$$y(x) = 2 + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

2) La radice dispari è sempre definita $\implies D = \mathbb{R}$.
Funzione né pari, né dispari.

$$f(x) \geq 0 \iff x \underbrace{(x^2 + 3x + 6)}_{\Delta < 0} \geq 0 \iff x \geq 0$$

f è negativa in $(-\infty, 0)$; positiva in $(0, +\infty)$.
Si annulla in $x = 0$, unico punto di intersezione con gli assi.

$$f'(x) = \frac{1}{3(x^3 + 3x^2 + 6x)^{2/3}} (3x^2 + 6x + 6)$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 2}{(x^3 + 3x^2 + 6x)^{2/3}}$$

A3

$f'(x)$ non è definita in $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$ PUNTO A TANGENTE VERTICALE.

Poiché $x^2+2x+2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0 \quad \forall x\neq 0$

f è sempre strettamente crescente.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

Poiché $f(x) = x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}} = 1+x+o(1)$ per $x\to\pm\infty$,

$y=x+1$ è asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$.

Si può arrivare allo stesso risultato nel seguente modo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

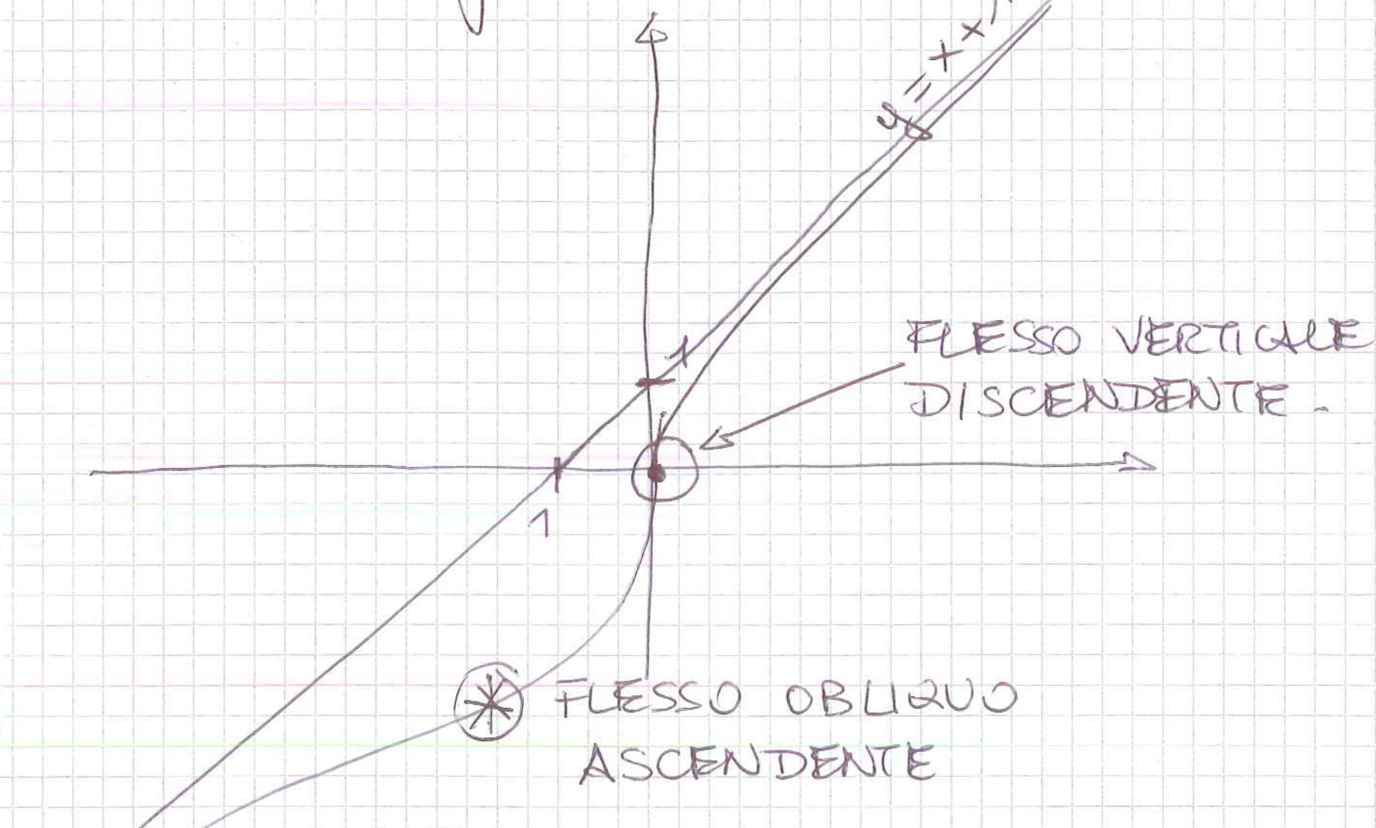
$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(\cancel{x^3}+3x^2+6x)-\cancel{x^3}}{\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x}+x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{3x^2} = 1$$

A4

Senza far uso di ulteriori informazioni, si deduce che un possibile grafico con numero MINIMO di flessi è



FACOLTATIVO:

In realtà, si può calcolare $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2(x^2-2x-4)}{(x^3+3x^2+6x)^{5/3}} = 0 \iff x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

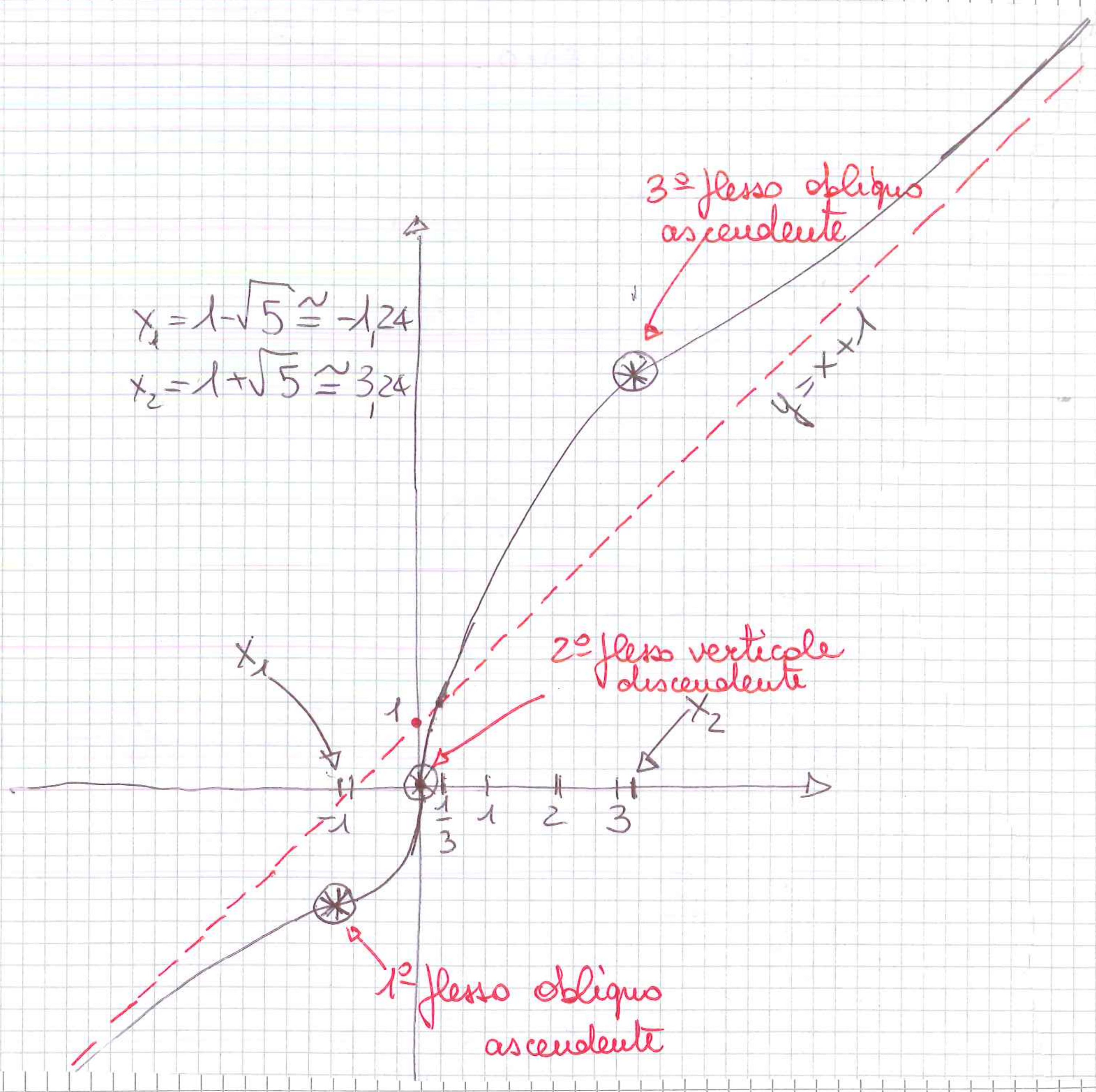
Quindi, oltre al flesso a tangente verticale, sono presenti altri 2 flessi.

Osservando che

$f(x) = x+1 \iff \sqrt[3]{x^3+3x^2+6x} = x+1$

$\iff x^3+3x^2+6x = (x+1)^3 \iff x = \frac{1}{3}$,

cioè che il grafico della f attraversa il suo asintoto obliquo nel punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, il grafico corretto, con 3 flessi, è su retto



3) $z \neq -4+i$

A 6

$$z+5+3i = i(z+4-i)$$

$$z(1-i) = 4i+1-5-3i$$

$$z = \frac{-4+i}{1-i} = \frac{(-4+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{-4-4i+i-1}{2} = -\frac{5}{2}+i\left(-\frac{3}{2}\right)$$

4) $$a_n = \frac{\left(-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}\right)-\left[1-\frac{1}{2n^4}\right]+\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)}$$

$$\sim \frac{\cancel{-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}}+\frac{1}{2n^4}}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\sum a_n \approx \frac{1}{\pi}\sum\frac{1}{n^2}$ che è convergente.

Quindi la serie proposta è convergente.

5) $$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln(|\ln x|)\Big|_e^{e^2}$$

$$= \ln(|\ln e^2|) - \ln(|\ln e|)$$

$$= \ln(2) - \ln(1) = \ln 2.$$

COMPITO B

B1

1) $z \neq 2-i$

$$z+3-5i = i(z-2+i)$$

$$z(1-i) = -2i-1-3+5i$$

$$z = \frac{-4+3i}{1-i} = \frac{(-4+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-4-4i+3i-3}{2}$$

$$= \frac{-7-i}{2} = -\frac{7}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right).$$

2) $$a_n = \frac{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\right) + \left[1 - \frac{1}{2n^4}\right] - \left[1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4}\right] + o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{\pi}{2} + o(1)\right)}$$

$$\sim \frac{-\frac{3}{2}\frac{1}{n^4}}{\frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}} = -\frac{3}{\pi n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Segue che $\sum a_n \approx -\frac{3}{\pi} \sum \frac{1}{n^2}$ che converge.

Dunque la serie proposta converge.

3) $$\int_0^{\ln 2} e^{e^x} \cdot e^x \, dx = e^{e^x}\Big|_0^{\ln 2} = e^{e^{(\ln 2)}} - e^{e^0}$$

$$= e^2 - e^1.$$

4) Equazione omogenea associata: (B2)

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 1$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

L'equazione non omogenea può essere risolta col principio di sovrapposizione.

È facile verificare che $\overline{y}_P(x) = 1$ è soluzione dell'equazione $y'' - 2y' + y = 1$.

Inoltre, poiché $\alpha = 1$ è radice del polinomio caratteristico con $m_a = 2$ cerchiamo la soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

nella forma $\overline{\overline{y}}_P(x) = A x^2 e^x \Rightarrow (\overline{\overline{y}}_P)' = A(2x + x^2)e^x$

$$\Rightarrow (\overline{\overline{y}}_P)'' = A(x^2 + 4x + 2)e^x$$

$$\Rightarrow A[\cancel{x^2} + \cancel{4x} + 2 - \cancel{4x} - \cancel{2x^2} + \cancel{x^2}]e^x = e^x$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{\overline{y}}_P(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

$\Rightarrow$ INT. GENERALE

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + 1.$$

$y(0) = c_1 + 1 = 1 \quad \Rightarrow c_1 = 0$ B3

$\Rightarrow y(x) = c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + 1$

$y'(x) = c_2 (x+1) e^x + \frac{1}{2}(2x + x^2) e^x$

$y'(0) = c_2 = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$

L'unica soluzione particolare del Problema di Cauchy è dunque

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x + 1$$

5) La radice dispari è sempre definita

$\Rightarrow D = \mathbb{R}$

Funzione né pari, né dispari.

Segno: $f(x) \geq 0 \iff x \underbrace{(x^2 - 3x + 8)}_{\Delta < 0} \geq 0$

$\iff x \geq 0$.

f è negativa in $(-\infty, 0)$; positiva in $(0, +\infty)$.
Si annulla in $x = 0$ (unica intersezione con gli assi).

$$f'(x) = \frac{1}{3(x^3 - 3x^2 + 8x)^{\frac{2}{3}}} \left[3x^2 - 6x + 8\right]$$

$f'(x)$ non è definita in $x = 0$:

$\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$ FLESSO A TANGENTE VERT.

Poiché $3x^2-6x+8>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{B_4}$

$\Rightarrow f'(x)>0 \quad \forall x\neq 0$. f è sempre strettamente crescente.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

Poiché $f(x) = x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}} = x\left[1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$$= x-1+o(1)$$

$\Rightarrow y=x-1$ è ASINTOTO OBLIQUO per $x\to\pm\infty$.

Otteniamo lo stesso risultato nel seguente modo:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-3x^2+8x}-x\right]$$

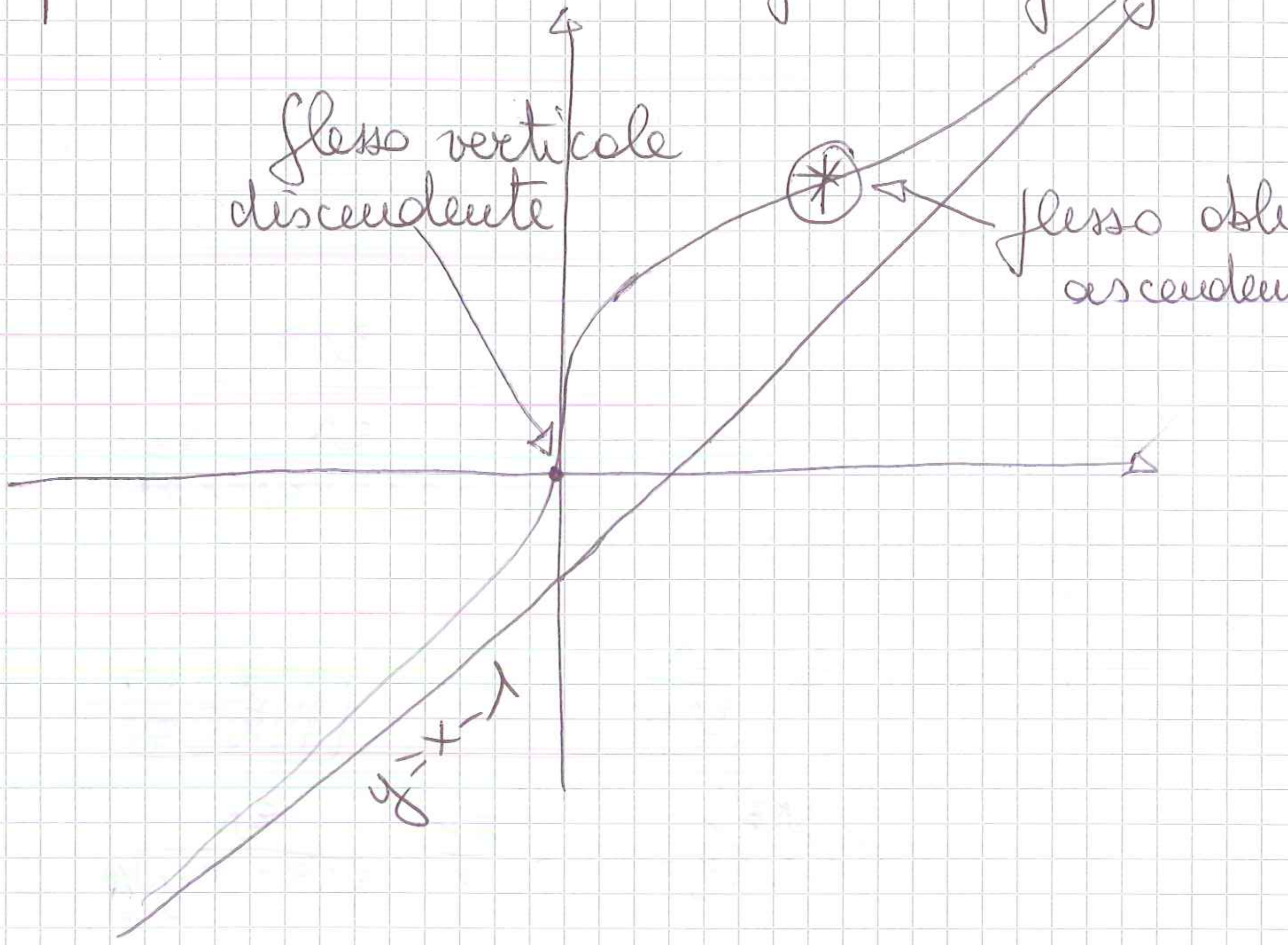
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\cancel{x^3}-3x^2+8x-\cancel{x^3}}{\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+8x}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-3x^2+8x}+x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2}{3x^2}=-1$$

$\Rightarrow y=x-1$ AS. OBLIQUO.

In assenza di ulteriori informazioni, e in ipotesi di numero MINIMO di flessi, si potrebbe tracciare il seguente grafico:

B_5



FACOLTATIVO: In realtà, calcolando la derivata seconda, otteniamo

$$f''(x) = \frac{2}{9}\left[\frac{15x^2+24x-64}{(x^3-3x^2+8x)^{5/3}}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{1104}}{15} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \cong -3{,}02 \\ x_2 \cong 1{,}42 \end{pmatrix}$$

Dunque la funzione ha in realtà 3 flessi.
Il grafico si completa osservando che il grafico di f interseca l'asintoto obliquo nel punto $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{6}{5}\right)$. Pertanto, il grafico è