SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 17/1/2022

$\textcircled{A_1}$

COMPITO A

1) L'equazione è lineare del primo ordine a coefficienti costanti e con $f(x) = \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$

Pertanto $\exists!$ soluzione su tutto $\mathbb{R}$ (in grande) del problema di Cauchy.

$$y_{NO}(x) = e^{-x}\left[\int e^x \cos x \, dx + C\right]$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\left[\cos x + \sin x\right] e^x + C$$

$$\Rightarrow y_{NO}(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ce^{-x}$$

$$y(\pi) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-1) + Ce^{-\pi} \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} \in C^0([\sqrt{3}, +\infty))$.

A₂

$$f(x) = \frac{1}{x^4-1} > 0 \iff x^4 > 1$$

$$\iff x < -1 \lor x > 1$$

Quindi $f(x) > 0$ in $[\sqrt{3}, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{x^4-1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$$ che è integrabile in $[\sqrt{3}, +\infty)$.

Calcoliamo l'integrale

$$\frac{1}{(x^4-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ -A+B-D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+2B=0 \\ C=0 \\ -2A+2B=1 \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\ln(|x+1|) + \frac{1}{4}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \right]_{\sqrt{3}}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \Big|_{\sqrt{3}}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cancel{= \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).$$

A_4

3) $$(z+2i)^5 + (z-i)^2(z+2i)^3 =$$
$$(z+2i)^3\left[(z+2i)^2 + (z-i)^2\right] =$$
$$(z+2i)^3\left[2z^2 + 2iz - 5\right] = 0$$

$\Rightarrow$ $z_1 = -2i$ con molt. algebrica 3.

Inoltre, $2z^2 + 2iz - 5 = 0$

$$\Rightarrow z_{2,3} = \frac{-i + \sqrt{-1+10}}{2} = \frac{-i \pm 3}{2}.$$

Le soluzioni rispettano il Teorema Fondamentale dell'Algebra, perché $z_1 = -2i$ va contato con $m_a = 3$.

4)
$$a_n = \frac{\frac{1}{n^2}\left[1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] + \left[-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{3n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right]}{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right]}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{n^2}} + \cancel{\frac{1}{2n^4}} + \frac{1}{24n^6} - \cancel{\frac{1}{n^2}} - \cancel{\frac{1}{2n^4}} - \frac{1}{3n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{\cancel{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \cancel{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n^6}}{-\frac{1}{3n^4}} = \frac{-7}{24} \cdot (-3) \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

A5

5) $f(x) = -1 + x + \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}$

$D = [0, +\infty)$

Lo studio del segno è complicato. Lo rinviamo a dopo.

$f(0) = -1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Non abbiamo asintoti obliqui. Infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} + 1 + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right] = +\infty.$$

$$f'(x) = 1 + e^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \right] = 1 + \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right)$$

$$> 0 \quad \forall x \in D.$$

Poiché $f(0) = -1$; $f(1) = e > 0$

e poiché $f'(x) > 0$, la funzione si annulla in un solo punto $x_0 \in (0,1)$

e $f(x) < 0 \quad \forall x \in [0, x_0)$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, +\infty)$.

$$f''(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{4x^{3/2}} e^{\sqrt{x}} \left(x + \sqrt{x} - 1 \right)$$

$f'' > 0 \iff x + \sqrt{x} - 1 > 0$

Poniamo $t = \sqrt{x} \geq 0 \quad (x = t^2)$

$$\Rightarrow t^2 + t - 1 > 0$$

$$\left(t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \; ; \; t > 0 \right)$$

$\Rightarrow f''(x) > 0$ per $t > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

cioè per $x > x_1 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) \cong 0{,}38.$$

Si osservi che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

Quindi $\nexists \ f'_+(0)$. $\quad$ A_7

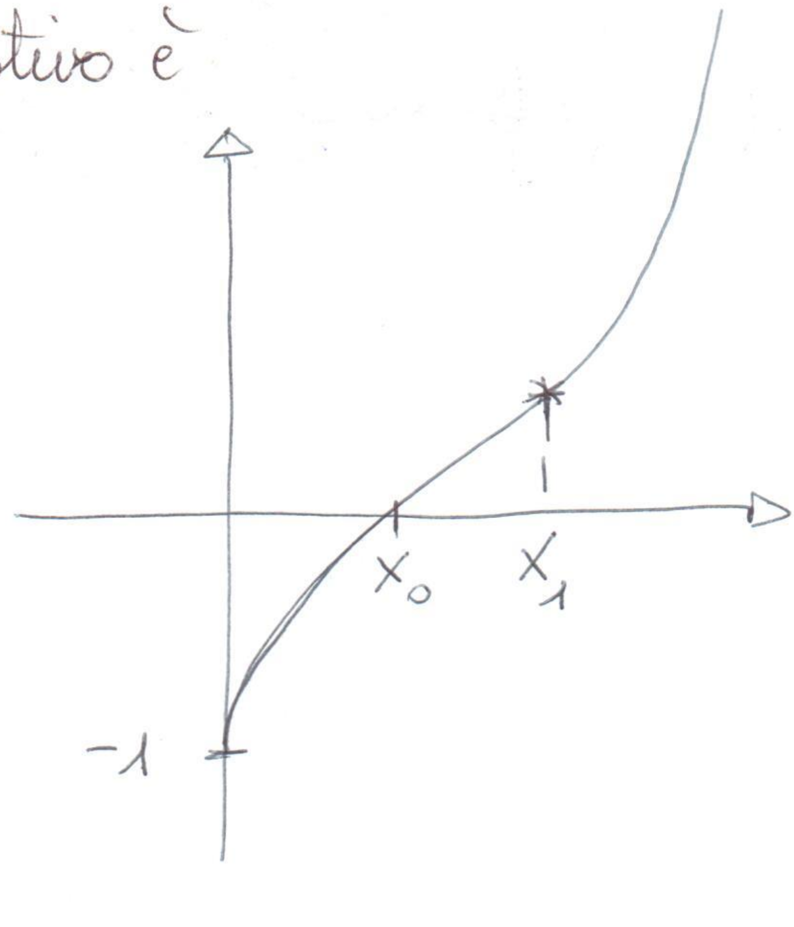
Al fine di posizionare il punto x_0 rispetto al punto di flesso x_1 (passaggio NON NECESSARIO ai fini dello studio qualitativo del grafico), osserviamo che $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{e} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{e} - 3\right)$

$$\cong 0{,}15 > 0.$$

Pertanto $x_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e $x_0 < x_1$.

Quindi il punto di flesso (ascendente) si ha in un punto in cui f è positi-va.

Il grafico qualitativo è



$\boxed{\text{COMPITO B}}$ B_1

1) $$(z-i)^5+(z+2i)^2(z-i)^3=$$

$$(z-i)^3\left[(z-i)^2+(z+2i)^2\right]=$$

$$(z-i)^3\left[2z^2+2iz-5\right]=0$$

$\Rightarrow$ $z_1=i$ con molt. algebrica 3

$$z_{2,3}=\frac{-i\pm 3}{2}$$

le soluzioni rispettano il Teorema Fondamentale dell'Algebra, in quanto $z_1=i$ va contato con $m_a=3$.

2) $$a_n=\frac{\frac{1}{n^2}\left[1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]-\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right]}{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right]}$$

$$=\frac{\cancel{\frac{1}{n^2}}-\cancel{\frac{1}{2n^4}}+\frac{1}{24n^6}-\cancel{\frac{1}{n^2}}+\cancel{\frac{1}{2n^4}}-\frac{1}{3n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{\cancel{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{3n^4}-\cancel{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{6n^6}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{3n^4}} = -\frac{7}{24}\cdot 3\,\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$ B₂

3) vedere esercizio 5) del compito A.

4) Poiché l'equazione è lineare a coefficienti costanti e $f(x)=\sin x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\exists!$ soluzione (in grande), in tutto $\mathbb{R}$.

$$y_{N_0}(x)= e^{x}\left[\int e^{-x}\sin x\,dx + C\right].$$

Calcoliamo

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x) + C$$

$$\Rightarrow y_{N_0}(x) = -\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) + Ce^{x}$$

$$y(\pi)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+Ce^{\pi} \Rightarrow C=0,$$

B_3

$$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = -\frac{1}{2}\left(\sin x + \cos x\right)}$$

5)
$$f(x) = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$, allora

$f \in C^0\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)\right)$.

$$f(x) > 0 \iff x^4 - \frac{1}{16} > 0$$
$$\iff x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > \frac{1}{2}.$$

Pertanto $f(x) > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

$$\frac{1}{x^4 - \frac{1}{16}} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}} + \frac{Cx+D}{x^2+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{A\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right) + B\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right) + (Cx+D)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{x^2 - \frac{1}{16}}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + D = 0 \\ \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B - \frac{1}{4}C = 0 \\ \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}B - \frac{1}{4}D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+2D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-2D=8 \end{cases}$$

B4

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A-B=4 \\ D=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=0 \\ D=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{1/\sqrt{3}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \left[\frac{2}{x-\frac{1}{2}} - \frac{2}{x+\frac{1}{2}} - \frac{2}{x^2+\frac{1}{4}}\right] dx$$

$$\left[\text{N.B.: } \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C\right]$$

$$= 2\ln\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|\right) - 2\ln\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|\right) - 4\operatorname{arctg}(2x)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty}$$

$$= 2\ln\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right) - 4\operatorname{arctg}(2x)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right) - 4\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}}\right) + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\pi + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 2\ln\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}}\right).$$ B_5

Il risultato non è proprio "simpatico", a causa di un refuso circa il valore iniziale dell'intervallo di integrazione.

L'essenziale, comunque, a prescindere dal risultato numerico, è la risoluzione dell'integrale indefinito.