SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI MAT. 1 del 18/10/18

1) Omogenea associata: ①

$$\alpha^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = \pm 1$$

$$\Rightarrow y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Soluzione particolare non omogenea:

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_p'(x) = 2ax + b$$

$$y_p''(x) = 2a$$

$$\Rightarrow \quad 2a - ax^2 - bx - c = -3x^2 + 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 2a - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = 3x^2$$

$\Rightarrow$ INT. GEN. $\quad y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + 3x^2$

②

Se $C_1=0 \Rightarrow y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2 \longrightarrow +\infty$

Se $C_1\neq 0 \Rightarrow y(x) \sim C_1 e^x \Rightarrow C_1>0$.

Quindi $C_1 \geq 0$.

Se $C_2=0 \Rightarrow y(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 3x^2 \not\longrightarrow -\infty$

Se $C_2\neq 0 \Rightarrow y(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} C_2 e^{-x} \Rightarrow C_2<0$

Quindi $C_2<0$.

Il problema ammette ∞^2 soluzioni:

$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+3x^2$, con $C_1\geq 0$; $C_2<0$.

2) Criterio di assoluta integrabilità:

$$|f(x)| = e^{-x}|\sin x| \leq e^{-x}$$

integrabile in $[0,+\infty)$

f è assolutamente integrabile, e quindi integrabile.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

$$= +1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}.$$

3) $i^{18} = i^{4\cdot 4+2} = i^2 = -1$

$i^{27} = i^{4\cdot 6+3} = i^3 = -i$

$$\frac{-3+i}{4i+\sqrt{6}} = \frac{(-3+i)(\sqrt{6}-4i)}{(\sqrt{6}+4i)(\sqrt{6}-4i)}$$

$$= \frac{-3\sqrt{6}+12i+\sqrt{6}i+4}{6+16} = \frac{(-3\sqrt{6}+4)+(12+\sqrt{6})i}{22}$$

$$\left|\frac{-3+i}{\sqrt{6}+4i}\right| = \sqrt{\frac{9+1}{6+16}} = \sqrt{\frac{10}{22}} = \sqrt{\frac{5}{11}}.$$

4) Criterio di Leibniz:

i) $$a_n = \frac{1}{n+\log(1+n)} \sim \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ii) $$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{1}{n+\log(1+n)} \geq \frac{1}{(n+1)+\log(2+n)}$$

$$\iff (n+1)+\log(n+2) \geq n+\log(1+n)$$

Sempre vero perchè

$n+1 > n > 0$

$\log(n+2) > \log(n+1) > 0.$

la serie converge.

5) $D = \{x > 0\}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ AS. VERTICALE DX $x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \sim 2x^2 \longrightarrow +\infty$ NO AS. OBLIQUO.

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2+1}{x} > 0 \quad \forall x \in D.$$

f sempre crescente in D.

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} > 0 \iff x^2 > \frac{1}{4}$$

$$\iff \left\{x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}\right\} \cap D = \left\{x > \frac{1}{2}\right\}$$

f concava in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, convessa in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

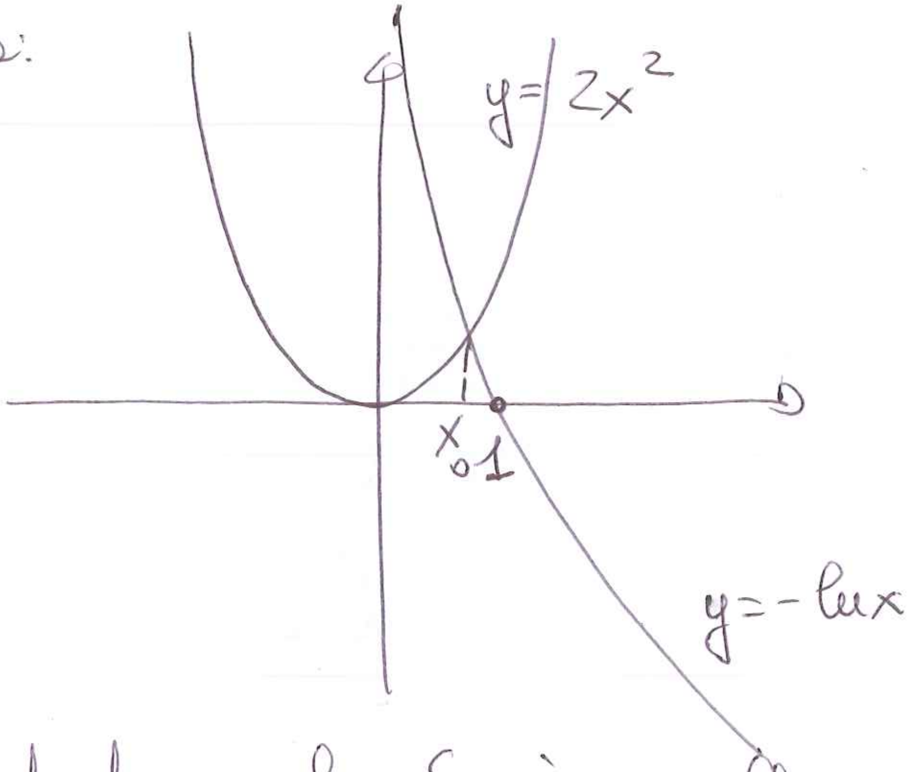
In $x = \frac{1}{2}$ flesso ascendente obliquo.

$\cancel{f(2) = 8 + \ln 2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2.$

Per lo studio del segno, osserviamo che $f(x) > 0 \iff 2x^2 > -\ln x$ (5)

Risolviamo la disequazione per via grafica:



Se ne deduce che f si annulla in un punto $x_0 \in (0,1)$ e che $f(x) > 0$ $\forall x \in (x_0, +\infty)$ e $f(x) < 0$ $\forall x \in (0, x_0)$.

Si può anche scegliere una via alternativa analitica.

Si osservi che, anche se non richiesto (6)

$f(1) = 2 > 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2 = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \ln 2$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) < \ln 1 = 0$

Quindi f si annulla in un punto $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

f è negativa in $(0, x_0)$ e positiva in $(x_0, +\infty)$.

L'immagine di f è

$f(D) = \mathbb{R}$