SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 25/6/2018

A_1

COMPITO A

1) OMOGENEA ASSOCIATA:

$$\alpha^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2}=\pm 2i$$

$$\Rightarrow y_0(x)=C_1 \operatorname{sen}(2x)+C_2\cos(2x)$$

EQ.NE COMPLETA: $y_p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

$$y_p'(x)=3Ax^2+2Bx+C$$

$$y_p''(x)=6Ax+2B$$

$$6Ax+2B+4Ax^3+4Bx^2+4Cx+4D=x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A=1 \\ 4B=0 \\ 6A+4C=0 \\ 2B+4D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=0 \\ C=-\frac{3}{2}A=-\frac{3}{8} \\ D=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x)=C_1\operatorname{sen}(2x)+C_2\cos(2x)+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x$$

$$y(0)=C_2=0$$

$$y(\pi)=\frac{1}{4}(\pi^3)-\frac{3}{8}\pi=0 \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$

$\Rightarrow \nexists$ soluzioni che soddisfino il problema ai bordi.

A_2

2) a) $f \in C^0\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$. Inoltre

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{3}{x} \quad \text{NON INTEGRABILE.}$$

b) $$\int \left(\frac{3 - tg^2 x}{tg\, x}\right) dx = \int \frac{3}{tg\, x}\, dx - \int tg\, x\, dx$$

$$= 3 \ln|\sin x| + \ln|\cos x| + C$$

c) Per il punto a), e poichè in $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$f(x) = \frac{3 - tg^2 x}{tg\, x} \geq 0 \quad , \text{ allora}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\, dx = +\infty.$$

Calcolando l'integrale direttamente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\, dx = \Big[3 \ln|\sin x| + \ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 3 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \lim_{x \to 0^+} \ln|\sin x|$$

$$= \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right) - \ln(0^+) = +\infty.$$

3) $\operatorname{Re}(z) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

A3

$$i(x+iy) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{3} - \frac{i}{3}\right) - y = 0$$

$$-y + ix + \frac{1}{3} - y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y = \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Ma } x \neq 0$$

Quindi nessuna soluzione.

4) $$n^5\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$= n^5\left[\cancel{\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{2n^6} + \frac{1}{3n^9} - \cancel{\frac{1}{n^3}} + \frac{1}{6n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\right]$$

$$= n^5\left(-\frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

Poichè la serie $-\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ diverge, allora la serie diverge (negativamente).

5) $\underline{I_{def}}$: $e^{2x}-1>0 \Rightarrow e^{2x}>1$ A_1

$\Rightarrow x>0$

Segno: $\ln(e^{2x}-1)=0 \iff e^{2x}-1=1$

$\iff e^{2x}=2 \iff 2x=\ln 2 \iff x=\frac{\ln 2}{2}$

$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=0$

$f(x)>0 \iff e^{2x}-1>1 \iff x>\frac{\ln 2}{2}$.

ASINTOTI: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ln(0^+)=-\infty$

ASINTOTO VERTICALE(DX): $x=0$.

Per $x\to+\infty$ $f(x)=\ln(e^{2x})+\ln(1-e^{-2x})$

$=2x+o(1) \Rightarrow y=2x$

AS. OBLIQUO

a $+\infty$.

MONOTONIA: $f'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}>0 \quad \forall x>0$

f sempre crescente. NO MAX-MIN, REL. o ASS.

$$f''(x) = 2\left[\frac{2e^{2x}(e^{2x}-1) - 2e^{4x}}{(e^{2x}-1)^2}\right]$$

$$= \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} < 0 \qquad \forall x > 0$$

A5

f sempre concava.

Grafico: