SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA

di ANALISI 1 del 13/7/2016 (1)

1) $z = y'$

$$z' + z\cos(x) = e^{-\sin(x)}\sin(x)$$

Eq.ne lineare in $z(x)$ $\quad [z(0) = -1]$

$$z(x) = e^{-\int_0^x \cos(t)dt} \left[\int_0^x e^{+\int_0^t \cos(s)ds} e^{-\sin(t)} \sin(t)dt - 1 \right]$$

$$= e^{-\sin(t)\big|_0^x} \left[\int_0^x e^{+\sin(s)\big|_0^t} e^{-\sin(t)} \sin(t)dt - 1 \right]$$

$$= e^{-\sin x} \left[\int_0^x \cancel{e^{+\sin(t)}} \cdot \cancel{e^{-\sin(t)}} \sin(t)dt - 1 \right]$$

$$= e^{-\sin x} \left(-\cos(t)\Big|_0^x - 1 \right)$$

$$= e^{-\sin x} \cdot (-\cos x).$$

$$\Rightarrow y'(x) = \cancel{0} - e^{-\operatorname{sen} x} \cos x$$

$$\Rightarrow \underline{y(x)} = 1 - \int_0^x e^{-\operatorname{sen}(t)} \cos(t)\, dt$$

$$= 1 + e^{-\operatorname{sen}(t)} \Big|_0^x$$

$$= 1 + e^{-\operatorname{sen}(x)} - 1$$

$$= \underline{e^{-\operatorname{sen}(x)}}$$

L'equazione lineare è tale che

$$a(x) = \cos(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f(x) = e^{-\operatorname{sen}(x)} \operatorname{sen}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \exists!\ \text{sol. } y \in C^2(\mathbb{R}) \quad \left(\begin{array}{c}\text{soluzione} \\ \text{GLOBALE}\end{array}\right).$$

2) Ovviamente $z = 0$ è soluzione dell'equazione.

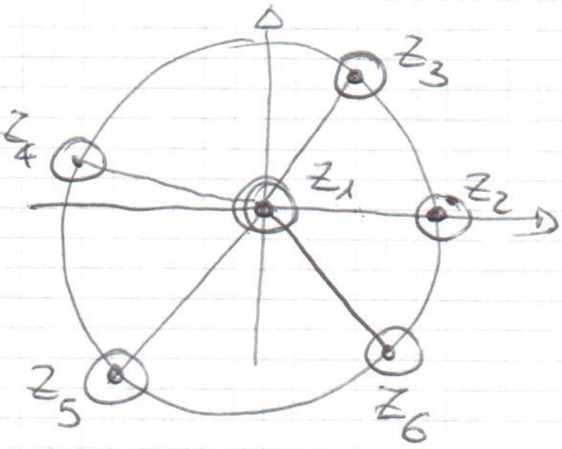
Passiamo in coordinate polari, per cercare soluzioni $z \neq 0$.

$\cancel{\rho^5[\cos(5\vartheta)}$

$$\rho^5 e^{i5\vartheta} = \rho^2 = \rho^2 e^{i\cdot 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^5 = \rho^2 \\ 5\vartheta = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \quad (\rho \neq 0)$$

$$\begin{cases} \rho^3 - 1 = 0 \\ \vartheta = \frac{2k}{5}\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{2k}{5}\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$



$n = 0 \Rightarrow \vartheta = 0$

$n = 1 \Rightarrow \vartheta = \frac{2}{5}\pi$

$\vdots$

PUNTI COINCIDENTI

$n = 4 \Rightarrow \vartheta = \frac{8}{5}\pi$

$n = 5 \Rightarrow \vartheta = \frac{10}{5}\pi = 2\pi$

$\vdots$

6 soluzioni distinte

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{2n^3+3}$ a segno alterno

Studiamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\log n}{2n^3+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3+3}$$

a) confronto asintotico :

$$\frac{\log n}{2n^3+3} \sim \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n^3 (\log n)^{-1}} \right)$$

e $\displaystyle\sum \frac{1}{n^3 (\log n)^{-1}}$ serie di Abel convergente

<u>oppure</u>

b) confronto:

$$\frac{\log n}{2n^3+3} < \frac{n}{2n^3+3} \sim \frac{1}{2n^2}$$

e $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ serie armonica generalizzata convergente

$\Rightarrow$ la serie convergente assolutamente e quindi semplicemente.

4)
$$f(x)=\begin{cases} 2x+4+e^{-x} & x\geq -2 \\ -2x-4+e^{-x} & x<-2 \end{cases}$$

$I_{def}=\mathbb{R}$

f è somma di una quantità non negativa e una quantità strettamente positiva

$\Rightarrow \quad f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(0)=5$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+4+e^{-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty$$

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} 2x+4 \quad \leftarrow \text{ASINTOTO OBLIQUO}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[-2x-4+e^{-x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

Andamento esponenziale $\Rightarrow$ NO ASINTOTO OBLIQUO.

$f \in C^0(\mathbb{R})$: $f(-2) = e^2$

f derivabile almeno in $\mathbb{R} - \{-2\}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - e^{-x} & x > -2 \\ -2 - e^{-x} < 0 & x < -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-2^+} f'(x) = \underbrace{2-e^2}_{<0} \neq \lim_{x\to-2^-} f'(x) = \underbrace{-2-e^2}_{<0}$$

PUNTO ANGOLOSO in $x = -2$.

$f'(x) < 0 \quad \forall x < -2$

(6 bis)

Per $x > -2$ $\quad f'(x) > 0 \iff e^{-x} < 2$

$\iff -x < \log 2 \iff x > -\log 2 = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(-\log 2) = 6 - 2\log 2.$

Dunque f decresce fino a $x = -\log 2$, poi cresce.

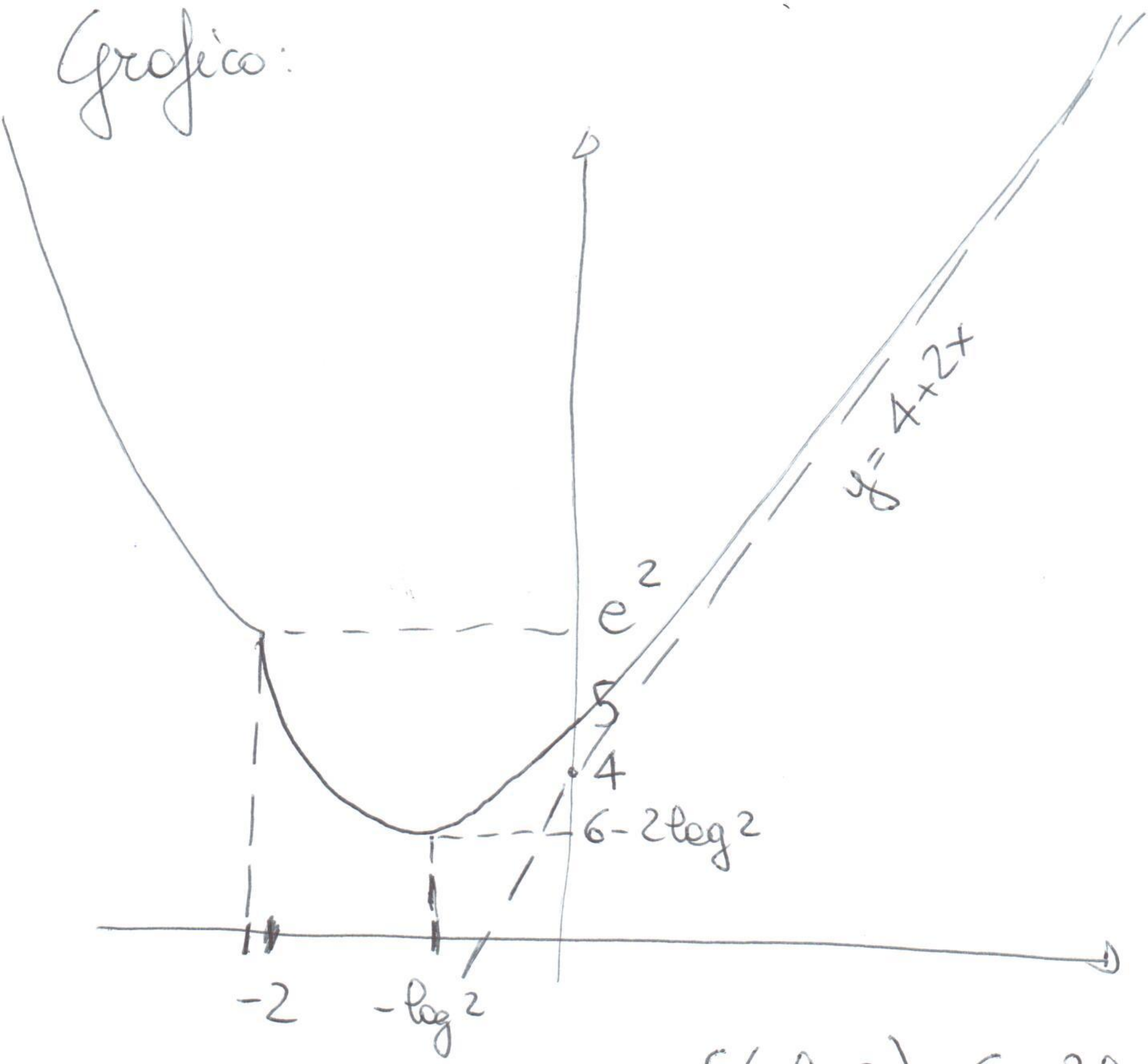
$x = -\log 2$ PUNTO DI MIN. REL. e ASS.

$\nexists$ PUNTI DI MAX. REL. o ASS.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > -2 \\ e^{-x} & x < -2 \end{cases}$$

Tenendo conto del punto di non derivabilità, avremo che f è convessa in $(-\infty, -2)$ e in $(-2, +\infty)$.

Grafico:



$$f(-\log 2) = 6 - 2\log 2$$

5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + \frac{\sin(x)}{x} - e^x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] + \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + \cancel{1} - \frac{x^2}{6} - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{6}x^2}{x^2} = -\frac{7}{6}.$$

Nel caso di $\alpha \neq 2$, poichè $\alpha \in \mathbb{R}$, possiamo calcolare solo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7}{6}x^2}{x^\alpha} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 0^- & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$