SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1
del 10/6/2019.

1) Riportiamo l'equazione in forma normale:

$$y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1$$

definita per $x \neq 0; -1$. Poiché $x_0 = -2$, cerchiamo le soluzioni in $(-\infty, -1)$.

Poiché i coefficienti sono continui in $(-\infty, -1)$, esiste ed è unica la soluzione in tale intervallo.

$$y(x) = e^{+\int_{-2}^{x} \frac{1}{t(t+1)} dt} \left[\int_{-2}^{x} e^{-\int_{-2}^{t} \frac{1}{s(s+1)} ds} dt \right]$$

Poiché $\int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right] dt$

$= \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + c$ allora

$$y(x) = e^{\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big]_{-2}^{x}} \left[\int_{-2}^{x} e^{-\ln \left| \frac{s}{s+1} \right| \Big]_{-2}^{t}} dt \right]$$

$$e^{\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \ln 2\right)} \int_{-2}^{x} e^{-\left(\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| - \ln 2\right)} dt$$ 2

Poichè

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{per } x<-1\ ;\ x>0 \\ \frac{-x}{x+1} & \text{per } -1<x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right) \int_{-2}^{x} \left(\frac{t+1}{t}\right) dt$$

$$= \left(\frac{x}{x+1}\right) \int_{-2}^{x} \left[1+\frac{1}{t}\right] dt = \left(\frac{x}{x+1}\right)\left[t+\ln|t|\right]_{-2}^{x}$$

$$= \left(\frac{x}{x+1}\right)\left[x+2+\ln\left|\frac{x}{-2}\right|\right] = \underline{\left(\frac{x}{x+1}\right)\left[x+2+\ln\left(\frac{-x}{2}\right)\right]}$$

2) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$

$\operatorname{tg}(t) = t + o(t)$

da cui

$$\lim_{x\to 0} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - \frac{(2x^2)^2}{2} + \frac{(2x^2)^3}{3} + o(x^6) - 2x^2\left[1 - \frac{(x\sqrt{2})^2}{2} + \frac{(x\sqrt{2})^4}{4!}\right]}{3x^2 \cdot x^4}$$

3

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^4} + \frac{8}{3}x^6 - \cancel{2x^2} + \cancel{\frac{4x^4}{2}} - \frac{\cancel{8}^{\,1}}{\cancel{24}\,3}x^6}{3x^6}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7}{9}\frac{x^6}{x^6} = \frac{7}{9}.$$

3) $z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

$$\Rightarrow z^{20} = \cos\left(\frac{40}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{40}{3}\pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^{16} = \cos\left(\frac{32}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{32}{3}\pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z^{20} - z^{16} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -i\sqrt{3}$$

4) Studiamo la serie col criterio di convergenza assoluta:

④

$$\sum |a_n| = \sum \frac{n^n}{(2n)!}$$

Criterio del rapporto:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

$$\frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{n^n} =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{e}{2\cdot(+\infty)} = 0 < 1$$

La serie converge assolutamente e quindi semplicemente.

5) $I_{def}: \begin{cases} x>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow I_{def} = \{x>0\} = (0,+\infty)$

NO intersezioni asse y.

Intersezione asse x: $1 + \ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e}$

$f(x) > 0$ in $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

$f(x) < 0$ in $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$ AS. VERTICALE $x=0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$ per ordini di infinito

AS. ORIZZONTALE a $+\infty$: $y=0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2} > 0$$

$$\iff \ln x < 0 \iff x \in (0,1)$$

f cresce in $(0,1)$

decresce in $(1,+\infty)$

$x_1 = 1$ punto di MAX. REL. e ASS.

$f(1) = 1$.

Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\nexists$ MIN. ASS.

Inoltre $f(D) = (-\infty, 1]$.

Anche se non richiesto, completiamo lo studio del grafico:

$$f''(x) = \left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)' = -\left[\frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln x\cdot 2x}{x^4}\right] = -\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$$

$f''(x) > 0 \iff 2\ln x > 1 \iff x > \sqrt{e}$ 6

f è concava in $(0, \sqrt{e})$

convessa in $(\sqrt{e}, +\infty)$

$x_2 = \sqrt{e}$ punto di flesso ascendente.