Esercitazione 21 e 24 Novembre 2014

Teorema di De l'Hôpital, Derivata, Massimi e Minimi

1. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

   (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cosh x\cos x}{x^4}$

   (c) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

   (d) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\sin x}-1}{x}$

   (e) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}$

   (f) $\lim_{x\to +\infty}\left(x\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)-x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

2. Dimostrare le seguenti disuguaglianze

   (a) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x \qquad \forall x>0$

   (b) $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2} \qquad \forall x\neq 0$

   (c) (disuguaglianza di Young) $xy\le\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$, con $x,y\ge 0$, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

3. Studiare continuità, derivabilità e comportamento asintotico della seguente funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}-\frac{1}{x-2} & -2<x<2\\ \sqrt{(x+2)(x-2)} & x<-2 \text{ oppure } x>2\end{cases}$$

4. Dire per quali valori dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ la seguente funzione è continua e derivabile:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{3a+2b}{x^2+1} & x\ge 1\\ x^2+2(a+b)x-1 & x>1\end{cases}$$

5. Trovare, se esistono, il massimo e il minimimo delle seguenti funzioni

   (a) $\sin|x|-|\sin x|,\ x\in[-3\pi,3\pi]$.

   (b) $(x^2-3)e^{2-x},\ x\in[1,+\infty)$.

   (c) $\dfrac{x}{1+x^2},\ x\in[-2,3]$.

   (d) $x+|\cos x|,\ x\in[0,2\pi]$.