SOLUZIONI COMPITO del 4/07/2013
ANALISI MATEMATICA II - 5 CFU
ENERGETICA

TEMA

Esercizio 1

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, l'insieme C si può riscrivere nella forma $\tilde{C} = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \ : \ 1 \le \rho \le \sqrt{3},\ \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4\}$ e l'integrale proposto diventa

$$\iint_C \frac{y}{x^2+y^2} \log(1+x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\rho \sin\theta}{\rho^2} \log(1+\rho^2)\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_1^{\sqrt{3}} \log(1+\rho^2)\, d\rho \right) = \left(-\cos\theta \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} \right) \left(\rho \log(1+\rho^2) \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\rho}{1+\rho^2} 2\rho\, d\rho \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left[\sqrt{3}\log 4 - \log 2 - 2 \left(\int_1^{\sqrt{3}} 1\, d\rho - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+\rho^2}\, d\rho \right) \right]$$

$$= \sqrt{2} \left(\sqrt{3}\log 4 - \log 2 - 2\rho \Big|_1^{\sqrt{3}} + 2\arctan\rho \Big|_1^{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{2}[\sqrt{3}\log 4 - \log 2 - 2\sqrt{3} + 2 + 2(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1)]$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{3}\log 4 - \log 2 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\pi/3 - 2\pi/4)\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = \sinh\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = \frac{1}{n^{3/2}}$, otteniamo

$$a_n := n^{3/2} \left[\cosh\left(\sinh \frac{1}{n^{3/2}} \right) - 1 \right] \sim n^{3/2} \frac{\left[\sinh\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]^2}{2} = n^{3/2} \frac{\sinh^2\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{2} \sim n^{3/2} \frac{1}{2(n^{3/2})^2} = \frac{1}{2n^{3/2}}\,.$$

Poiché $3/2 > 1$, dal criterio del confronto asintotico si ricava che la serie proposta converge.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare omogenea del primo ordine, in quanto può essere riscritta nella forma $y'(x) - (3x^2 \log x) y(x) = 0$. Utilizzando, quindi, la formula risolutiva e tenendo conto che

$$\int_1^x 3t^2 \log t\, dt = x^3 \log x - \int_1^x t^3 \frac{1}{t}\, dt = x^3 \log x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\,,$$

e $y(1) = 1$ otteniamo che la soluzione richiesta sarà $y(x) = \sqrt[3]{e}\, \frac{x^{x^3}}{e^{x^3/3}}$.

Esercizio 4

Osserviamo che per $\alpha < -2$ e $\alpha > 2$ la funzione integranda è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$, pertanto l'integrale esiste finito nel senso di Riemann, cioè in senso proprio. Se, invece, $\alpha \in [-2, 2] \setminus \{-1\}$, otteniamo che, in un intorno di $x = -\alpha$, $f(x) = \left| \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+\alpha} \right| \sim \left| \frac{(-\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+1)}{x+\alpha} \right| = \frac{C}{|x+\alpha|}$, che non è integrabile in senso improprio, per il criterio del confronto asintotico per integrali. Infine, se $\alpha = -1$, si ha $f(x) = \left| \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \right| = (x^2 + x + 1)$, cioè f è prolungabile con continuità in tutto l'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$, pertanto essa è integrabile in senso proprio.

Esercizio 5

a) L'affermazione è falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } xy=0,\\ 1 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è identicamente nulla sugli assi cartesiani, quindi ha entrambe le derivate parziali nulle nell'origine. Tuttavia, essa non ammette limite per $(x,y)\to(0,0)$, in quanto procedendo, ad esempio, una volta lungo la bisettrice ed una volta lungo l'asse x otteniamo

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} f(x,0)\,.$$

b) L'affermazione è corretta, poiché se f è differenziabile nell'origine essa è ivi continua, quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\,.$$

c) L'affermazione è corretta, poiché se f ammette piano tangente in $(0,0)$, essa è ivi differenziabile e quindi vale la formula del gradiente per le derivate direzionali, cioè

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v_2 \qquad \text{per ogni direzione } \vec{v}\in\mathbb{R}^2.$$

Inoltre, poiché per ipotesi il piano tangente è parallelo al piano xy, ciò significa che $\nabla f(0,0)=(0\,0)$; pertanto dalla formula sopra si ottiene subito

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v_2=0v_1+0v_2=0 \qquad \text{per ogni direzione } \vec{v}\in\mathbb{R}^2.$$