SOLUZIONI COMPITO del 11/09/2013
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA - MECCANICA - AMBIENTE e TERRITORIO

TEMA A

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che il numero $z = -1 - \sqrt{3}i$ può essere riscritto nella forma $z = 2e^{4\pi i/3}$, in quanto $r = \sqrt{1+3} = 2$ e $\cos\theta = -1/2$, $\sin\theta = -\sqrt{3}/2$. Quindi,

$$\sqrt[6]{(-1-\sqrt{3}i)^6} = \sqrt[6]{(2e^{4\pi i/3})^6} = \begin{cases} 2e^{4\pi i/3}\,, \\ 2e^{5\pi i/3}\,, \\ 2e^{6\pi i/3} = 2e^{2\pi i} = 2\,, \\ 2e^{7\pi i/3} = 2e^{\pi i/3}\,, \\ 2e^{8\pi i/3} = 2e^{2\pi i/3}\,, \\ 2e^{9\pi i/3} = 2e^{3\pi i} = -2\,. \end{cases}$$

Infatti, una radice è chiaramente $2e^{4\pi i/3}$ e le altre si ottengono ruotando ogni volta di un angolo pari a $2\pi/6 = \pi/3$.

Esercizio 2

Applicando il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|x^2-4|^{n+5}}{4n(n+1)2^{-n+1}}} = \sqrt[n]{\frac{|x^2-4|^n}{2^{-n}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{|x^2-4|^5}{4n(n+1)2}} \to \frac{|x^2-4|}{2^{-1}}\,.$$

Quindi la serie converge per $2|x^2-4| < 1$, cioè per $x^2 < 4+1/2$ e $x^2 > 4-1/2$, ovvero $-3/\sqrt{2} < x < -\sqrt{7/2}$ e $\sqrt{7/2} < x < 3/\sqrt{2}$; la serie diverge per $2|x^2-4| > 1$, ovvero $x < -3/\sqrt{2}$, $-\sqrt{7/2} < x < \sqrt{7/2}$ e $x > 3/\sqrt{2}$. Per $x = \pm\sqrt{7/2}$ e $x = \pm 3/\sqrt{2}$ il limite della radice ennesima viene 1 e, quindi, il criterio non dà informazioni. Tuttavia, sostituendo nel termine generale della serie i valori trovati otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\pm 1/2|^{n+5}}{4n(n+1)2^{-n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\pm 1/2|^5}{4n(n+1)2} = \frac{1}{2^8}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,,$$

che è una serie convergente, in quanto il termine generale $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 3

Per studiare la monotonia e gli estremanti di f, calcoliamone, dove possibile, la derivata; otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x+1}{x^2+1+(x-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \text{se } x < 1, \\ \sqrt[3]{x-1} + (x-1)\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x-1} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $x > 1$, $|x+1| - 2 = x - 1$. Da ciò si ricava che $f'(x) > 0$ per $x > 1$ e per $x + 1 < 0$, cioè $x < -1$, mentre $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 1$ e $f'(x) = 0$ per $x = -1$. Pertanto, la funzione cresce per $x > 1$ e $x < -1$ e decresce per $-1 < x < 1$; quindi, ha un punto di minimo locale in $x = 1$ e un punto di massimo locale in $x = -1$. Poiché, inoltre,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\sqrt[3]{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x^{4/3} = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty} -\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right) = \pi/4\,,$$

e $f(1) = 0$, ricaviamo anche che $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Quest'ultimo fatto segue anche, più semplicemente, tenendo conto che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Ricordiamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\,, \qquad \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
[x - \sin x]^2 \log(1+x^2) &= \left[x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]^2 \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] \\
&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]^2 \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] \\
&= \left[\frac{x^6}{36} - \frac{x^8}{5!3} + o(x^8)\right] \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] = \frac{x^8}{36} - \frac{x^{10}}{5!3} - \frac{x^{10}}{72} + o(x^{10})\,.
\end{aligned}$$

Quindi il polinomio richiesto è $P_{10}(x) = \frac{x^8}{36} - \frac{x^{10}}{60}$.

Esercizio 5

Dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene che $F'(x) = \mathrm{e}^{x^2} f(x^2) 2x$. Quindi $x = 0$ è chiaramente un punto stazionario. Affinché esso risulti essere un punto di massimo assoluto, è sufficiente che $F'(x) > 0$ per $x < 0$ e $F'(x) < 0$ per $x > 0$, ovvero che $f(t)$ sia negativa per $t > 0$.

TEMA B

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che il numero $z = -1 - i$ può essere riscritto nella forma $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{5\pi i/4}$, in quanto $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$, $\sin\theta = -1/\sqrt{2}$. Quindi,

$$\sqrt[6]{(-1-i)^6} = \sqrt[6]{(\sqrt{2}\mathrm{e}^{5\pi i/4})^6} = \begin{cases} \sqrt{2}\mathrm{e}^{5\pi i/4}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{19\pi i/12}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{23\pi i/12}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{27\pi i/12} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi i/4}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{31\pi i/12} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{7\pi i/12}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{35\pi i/12} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{11\pi i/12}\,. \end{cases}$$

Infatti, una radice è chiaramente $2\mathrm{e}^{5\pi i/4}$ e le altre si ottengono ruotando ogni volta di un angolo pari a $2\pi/6 = \pi/3$.

Esercizio 2

Applicando il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|x^2-2|^{n-3}}{2(\sqrt{n}+2)(\sqrt{n}+3)2^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{|x^2-2|^n}{2^n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{|x^2-2|^{-3}}{2(\sqrt{n}+2)(\sqrt{n}+3)2^{-1}}} \to \frac{|x^2-2|}{2}\,.$$

Quindi la serie converge per $|x^2-2| < 2$, cioè per $x^2 < 4$ e $x^2 > 0$, ovvero $-2 < x < 0$ e $0 < x < 2$; la serie diverge per $|x^2-2| > 2$, ovvero $x < -2$ e $x > 2$. Per $x = \pm 2$ e $x = 0$ il limite della radice ennesima viene 1 e, quindi, il criterio non dà informazioni. Tuttavia, sostituendo nel termine generale della serie i valori trovati otteniamo

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{|\pm 2|^{n-3}}{2(\sqrt{n}+2)(\sqrt{n}+3)2^{n-1}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{|\pm 2|^{-3}}{2(\sqrt{n}+2)(\sqrt{n}+3)2^{-1}} = \frac{1}{2^3}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+2)(\sqrt{n}+3)}\,,$$

che è una serie divergente, in quanto il termine generale $a_n \sim \frac{1}{n}$.

Esercizio 3

Per studiare la monotonia e gli estremanti di f, calcoliamone, dove possibile, la derivata; otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{(x-2)^2}{x^2+2}} \, \frac{\sqrt{x^2+2}-(x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = 2\frac{x+1}{x^2+2+(x-2)^2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} & \text{se } x > 2, \\ \sqrt[3]{-x+1} - (x-2)\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x+1)^2}} = \frac{-4x+5}{\sqrt[3]{(-x+1)^2}} & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $x < 2$, $|x-4| - 3 = -x + 1$. Da ciò si ricava che $f'(x) > 0$ per $x > 2$ e per $-4x + 5 > 0$, cioè $x < 5/4$, mentre $f'(x) < 0$ per $5/4 < x < 2$ e $f'(x) = 0$ per $x = 5/4$. Pertanto, la funzione cresce per $x > 2$ e $x < 5/4$ e decresce per $5/4 < x < 2$; quindi, ha un punto di minimo locale in $x = 2$ e un punto di massimo locale in $x = 5/4$. Poiché, inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)\sqrt[3]{-x+1} = \lim_{x\to-\infty} -x^{4/3} = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right) = \pi/4\,,$$

e $f(5/4) = 3/4^{5/3} < \pi/4$, ricaviamo anche che non ci sono estremanti assoluti.

Esercizio 4

Ricordiamo che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\,, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
[12 - 6x^2 - 12\cos x]^2(\mathrm{e}^{x^2} - 1) &= \left[12 - 6x^2 - 12 + 6x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{60} + o(x^6)\right]^2 \left[x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] \\
&= \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{60} + o(x^6)\right]^2 \left[x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] \\
&= \left[\frac{x^8}{4} - \frac{x^{10}}{60} + o(x^{10})\right] \left[x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] = \frac{x^{10}}{4} - \frac{x^{12}}{60} + \frac{x^{12}}{8} + o(x^{12})\,.
\end{aligned}$$

Quindi il polinomio richiesto è $P_{12}(x) = \frac{x^{10}}{4} + \frac{13}{120}x^{12}$.

Esercizio 5

Dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene che $F'(x) = \mathrm{e}^{x^2} f(x^2)2x$. Quindi $x = 0$ è chiaramente un punto stazionario. Affinché esso risulti essere un punto di massimo assoluto, è sufficiente che $F'(x) > 0$ per $x < 0$ e $F'(x) < 0$ per $x > 0$, ovvero che $f(t)$ sia negativa per $t > 0$.