

SOLUZIONI COMPITO del 3/07/2014
ANALISI MATEMATICA I - 5 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo (indipendentemente dal valore del parametro reale x). Inoltre, utilizzando, ad esempio, il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|x^2 - 3|^n}{2^n(n+1)}} \sim \frac{|x^2 - 3|}{2} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \rightarrow \frac{|x^2 - 3|}{2} \begin{cases} < 1 & \text{se } -2 < x^2 - 3 < 2 \\ = 1 & \text{se } x^2 - 3 = \pm 2 \\ > 1 & \text{se } x^2 - 3 < -2, x^2 - 3 > 2 \end{cases} \begin{matrix} \iff 1 < x^2 < 5, \\ \iff x^2 = 1; 5, \\ \iff x^2 < 1, x^2 > 5. \end{matrix}$$

Pertanto, per $\{-\sqrt{5} < x < -1\} \cup \{1 < x < \sqrt{5}\}$ la serie converge, per $\{x < -\sqrt{5}\} \cup \{-1 < x < 1\} \cup \{x > \sqrt{5}\}$ la serie diverge, per $x = \pm 1; \pm\sqrt{5}$, il criterio non dà informazioni. Sostituendo, quindi, $x = \pm 1; \pm\sqrt{5}$ nella serie, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

e quest'ultima serie è divergente, poiché il termine generale è asintotico a quello della serie armonica.

Concludendo la serie proposta converge per $\{-\sqrt{5} < x < -1\} \cup \{1 < x < \sqrt{5}\}$ e diverge per $\{x \leq -\sqrt{5}\} \cup \{-1 \leq x \leq 1\} \cup \{x \geq \sqrt{5}\}$.

Esercizio 2

Utilizzando il metodo di riduzione degli integrali doppi, l'integrale proposto si può riscrivere come segue

$$\begin{aligned} \iint_D (4x+2)e^{y+x} dx dy &= 2 \int_0^1 (2x+1) \left(\int_0^{x^2} e^{y+x} dy \right) dx = 2 \int_0^1 (2x+1) \left(e^{y+x} \Big|_0^{x^2} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 (2x+1) \left(e^{x^2+x} - e^x \right) dx = 2 \left(e^{x^2+x} \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x+1)e^x dx \right) \\ &= 2 \left(e^2 - 1 - (2x+1)e^x \Big|_0^1 + 2e^x \Big|_0^1 \right) = 2(e^2 - 1 - 3e + 1 + 2e - 2) = 2(e^2 - e - 2). \end{aligned}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1; 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Poiché $\lambda = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = A x e^x$, da cui $y_p'(x) = A e^x + A x e^x$ e $y_p''(x) = 2A e^x + A x e^x$. Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$(2A + Ax - 3A - 3Ax + 2Ax)e^x = 2e^x \implies -A = 2 \implies A = -2,$$

quindi $y_p(x) = -2x e^x$ e l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2x e^x$. Inserendo, ora, le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + C_2, \\ -2 = y'(0) = C_1 + 2C_2 - 2, \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + 2C_2 = 0, \end{cases} \implies C_1 = C_2 = 0.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà $y(x) = -2x e^x$.

Esercizio 4

Poiché la funzione proposta è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, per studiarne i punti critici procediamo calcolando e annullando il suo gradiente. Otteniamo in tal modo

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - 2y = 0, \\ f_y(x, y) = 4y^3 - 2x = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x^3, \\ 32x^9 - 2x = 0, \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{2}, \\ y = \pm 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Pertanto, abbiamo tre punti stazionari: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $P_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Calcoliamo, ora, la matrice Hessiana $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = 12y^2$ e $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -2$. Pertanto, $H_f(0, 0) = -4 < 0$, quindi P_0 è un punto di sella, mentre $H_f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = 36 - 4 > 0$ e $f_{xx}(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = 6 > 0$, quindi P_1 e P_2 sono punti di minimo relativo.

Esercizio 5

Tutte le affermazioni sono false, basta prendere $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ nella A) e nella D), con $b_n = a_n^2$; $a_n = \frac{1}{n^4}$ nella B), con $b_n = \sqrt{a_n}$; $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ nella C).