SOLUZIONI COMPITO del 10/01/2014
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

TEMA

Esercizio 1

Poiché la funzione integranda $f(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^4}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, si ottiene subito che $C.E.(F) = \mathbb{R}$. Inoltre, poiché

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \leq e^{-x}$ che è impropriamente integrabile in un intorno di $+\infty$,
per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \to +\infty$ e quindi non è impropriamente integrabile in un intorno di $-\infty$,

ricaviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^4}\,dt = \alpha \in \mathbb{R}\,, \quad \text{quindi } y=\alpha \text{ è asintoto orizzontale,}$$
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \int_0^{-\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^4}\,dt = -\infty\,, \quad \text{quindi non c'è asintoto orizzontale,}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} F'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^4} = +\infty\,, \quad \text{quindi non c'è asintoto obliquo.}$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi. Inoltre, posto $a_n := \frac{\sin(n^{-2/3})}{n^{\alpha^2-2}}$, poiché $n^{-2/3} \to 0$, si ha che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$a_n \sim \frac{n^{-2/3}}{n^{\alpha^2-2}} = \frac{1}{n^{\alpha^2-4/3}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $\alpha^2 - 4/3 > 1$, ovvero $\alpha^2 - 7/3 > 0$, che fornisce $\alpha > \sqrt{7/3}$ e $\alpha < -\sqrt{7/3}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = e^{-x}[C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che $y_p(x) = Ae^{-x}$, da cui $y_p'(x) = -Ae^{-x}$ e $y_p''(x) = Ae^{-x}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$Ae^{-x} - 2Ae^{-x} + 3Ae^{-x} = 2e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad 2A = 2 \quad \Longrightarrow \quad A = 1\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = e^{-x}[C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)] + e^{-x} \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo, ora, le condizioni iniziali, ricaviamo

$$1 = y(0) = C_1 + 1\,, \qquad \text{ovvero } C_1 = 0;$$
$$2 = y'(0) = \Big[-e^{-x}C_2\sin(\sqrt{2}x)] + e^{-x}\sqrt{2}C_2\cos(\sqrt{2}x) - e^{-x}\Big]\Big|_{x=0} = \sqrt{2}C_2 - 1\,, \quad \text{ovvero } C_2 = 3/\sqrt{2}.$$

Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = e^{-x}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x) + 1\right]\,.$$

Esercizio 4

Dal Teorema di riduzione degli integrali doppi otteniamo

$$
\begin{aligned}
\iint_Q \arctan y \, dx\, dy &= \int_0^1 \left[\int_0^x \arctan y \, dy\right] dx = \int_0^1 \left[y \arctan y\Big|_0^x - \int_0^x \frac{y}{1+y^2}\, dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+y^2)\Big|_0^x \right] dx = \int_0^1 \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right] dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx - \frac{x}{2}\log(1+x^2)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\arctan 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx - \frac{1}{2}\log 2 \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}(1-\log 2)\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

(A) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n^4}{b_n} = 1 \not\to 0$, quindi la serie diverge.

(B) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n^2 \log^2 n}$ e $b_n = \frac{1}{n \log n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n \log n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$; tuttavia la serie diverge.

(C) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n^4}{b_n} = \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge.

(D) L'affermazione è vera, poiché condizione necessaria per la convergenza della serie è che il termine generale sia infinitesimo, ovvero, nel nostro caso, $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, che per definizione equivale a richiedere $\frac{a_n}{b_n} = o(1)$.