SOLUZIONI COMPITO del 10/02/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 3$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 3$, in quanto

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\log(1+x^2/9)\arctan\left[3\log\left(1+(x-3)^2\right)\right]}{(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(\log 2)3(x-3)^2}{(x-3)} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 3^+} \sin\left[(\log 8)(x-3)\right] = 0 = f(3)\,,$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\left[\frac{\log[1+(3+t)^2/9]\arctan\left[3\log\left(1+t^2\right)\right]}{t} - 0\right] = \lim_{t\to 0^-}\left[\frac{(\log 2)3t^2}{t^2}\right] = \log 8\,,$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big[\sin\left[(\log 8)t\right] - 0\Big] = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\log 8)t}{t} = \log 8\,.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\log 8)(x-3)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n}{n^2+1} \to 0$, otteniamo

$$a_n := [n^{1/4} - \log(n^{10})]^{4\alpha}\left(e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1 - \frac{1}{2n+1}\right) \sim [n^{1/4}]^{4\alpha}\left(\frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\sim n^\alpha\left(\frac{n}{n^2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n^{1-\alpha}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1, \\ 1/2 & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}[y^2(x)+2]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan[y(x)/\sqrt{2}] = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dy\right)\Big|_{y=y(x)} = \int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = -\sqrt{2-x^2} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan 1 = -\sqrt{2} + C$, ovvero $C = (\pi+8)/4\sqrt{2}$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{2}\tan\left[\pi/4 + 2 - \sqrt{2}\sqrt{2-x^2}\right]\,.$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos(6x) = 2\cos^2(3x) - 1$, otteniamo

$$\int_0^{\pi/12} \frac{\tan(3x)}{1+\tan^2(6x)}\,dx = \int_0^{\pi/12} \frac{\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{\cos^2(6x)+\sin^2(6x)}{\cos^2(6x)}}\,dx = \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\,\cos^2(6x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\,[2\cos^2(3x)-1]^2\,dx = \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\,[4\cos^4(3x) - 4\cos^2(3x) + 1]\,dx$$

$$=4\int_0^{\pi/12} \sin(3x)\,\cos^3(3x) - 4\int_0^{\pi/12} \sin(3x)\,\cos(3x) + \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\,dx$$

$$= -4\frac{\cos^4(3x)}{4\cdot 3}\Big|_0^{\pi/12} + 4\frac{\cos^2(3x)}{2\cdot 3}\Big|_0^{\pi/12} - \frac{\log[\cos(3x)]}{3}\Big|_0^{\pi/12}$$

$$=\frac{1}{3}\big[-\cos^4(\pi/4) + 1 + 2\cos^2(\pi/4) - 2 - \log[\cos(\pi/4)]\big] = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\log 2\,.$$

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 f(x^2) - x^2 \mathrm{e}^{-x^2}] \geq 0\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \to -\infty$ (cioè per $x < 0$) e ricordando che per ipotesi $f > 0$ su tutto $\mathbb{R}$, dividendo per x^3, ricaviamo

$$f(x^2) - \mathrm{e}^{-x^2} \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x^2) \leq \mathrm{e}^{-x^2}\,,$$

ovvero $0 < f(x^2) \leq \mathrm{e}^{-x^2} \to 0$, per $x \to -\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema dei due carabinieri.

TEMA B

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 2$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 2$, in quanto

$$\lim_{x\to 2^-} \arctan\left[\frac{\pi}{2}(x-2)\right] = 0 = f(2)\,,$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(3-x)\right]\log\left[1+\pi\arctan^2(x-2)\right]}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\pi(x-2)^2}{2(x-2)} = 0\,,$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}\left[\arctan\left(\frac{\pi}{2}\,t\right) - 0\right] = \lim_{t\to 0^-}\frac{(\pi/2)t}{t} = \pi/2\,,$$
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+t)\right]\log\left[1+\pi\arctan^2 t\right]}{2t} - 0\right] = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\pi\, t^2}{2t^2}\right] = \pi/2\,.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\pi/2)(x-2)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^3+2} \to 0$, otteniamo

$$a_n := \frac{\left(\frac{4}{2n^2+3} + 1 - e^{\frac{n+1}{n^3+2}}\right)}{[n^3+(\log n)^5]^{\alpha/6}} \sim \frac{\left(\frac{4}{2n^2+3} - \frac{n+1}{n^3+2}\right)}{[n^3]^{\alpha/6}}$$
$$\sim \frac{\left(\frac{4}{2n^2} - \frac{n}{n^3}\right)}{n^{\alpha/2}} = \frac{1}{n^{\alpha/2+2}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -4,\\ 1 & \text{se } \alpha = -4,\\ +\infty & \text{se } \alpha < -4.\end{cases}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}[y^2(x)+4]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2}\arctan[y(x)/2] = \frac{1}{4}\left(\int\frac{1}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy\right)\Big|_{y=y(x)} = -\int\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = -2\sqrt{x^2-4}+C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\arctan 1 = -2+C$, ovvero $C = (\pi+16)/8$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = 2\tan\left[\pi/4 + 4 - 4\sqrt{x^2-4}\right]\,.$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos^2(3x) = \frac{\cos(6x)+1}{2}$, otteniamo

$$\int_0^{\pi/24}\frac{\tan(6x)}{1+\tan^2(3x)}\,dx = \int_0^{\pi/24}\frac{\frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}}{\frac{\cos^2(3x)+\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)}}\,dx = \int_0^{\pi/24}\frac{\frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}}{\frac{1}{\cos^2(3x)}}\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/24}\frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}\cos^2(3x)\,dx = \int_0^{\pi/24}\frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}\,\frac{\cos(6x)+1}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/24}\sin(6x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/24}\frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}\,dx = -\frac{\cos(6x)}{2\cdot 6}\Big|_0^{\pi/24} - \frac{\log[\cos(6x)]}{2\cdot 6}\Big|_0^{\pi/24}$$
$$= -\frac{1}{12}\left[\cos(\pi/4) - 1 + \log[\cos(\pi/4)]\right] = -\frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\log 2\,.$$

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 e^{x^2} - x^2 f(x^2)] \leq 0\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \to +\infty$ (cioè per $x > 0$), dividendo per x^3, ricaviamo

$$e^{x^2} - f(x^2) \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{x^2} \leq f(x^2)\,,$$

ovvero $f(x^2) \geq e^{x^2} \to +\infty$, per $x \to +\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema del confronto.

TEMA C

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 4$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 4$, in quanto

$$\lim_{x\to 4^-} -\frac{1}{4}\log\left[1+\pi(4-x)\right] = 0 = f(4)\,,$$
$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(5-x)\right]\arctan^2\left[\log\left(1+\sqrt{\pi}(x-4)\right)\right]}{4(x-4)} = \lim_{x\to 4^+}\frac{\pi(x-4)^2}{4(x-4)} = 0\,,$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}\Big[-\frac{1}{4}\log\left(1-\pi\, t\right)-0\Big] = \lim_{t\to 0^-}\frac{\pi t}{4t} = \pi/4\,,$$
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-t)\right]\arctan^2\left[\log\left(1+\sqrt{\pi}\,t\right)\right]}{4t}-0\right] = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\pi\, t^2}{4t^2}\right] = \pi/4\,.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\pi/4)(x-4)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $\mathrm{e}^{\varepsilon_n}-1\sim\varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n}{2n^3+4}\to 0$, otteniamo

$$a_n := \frac{\left(\frac{2}{5n^2+4}+1-\mathrm{e}^{\frac{n}{2n^3+4}}\right)}{[n^{1/3}+(\log n)^4]^{9\alpha}} \sim \frac{\left(\frac{2}{5n^2+4}-\frac{n}{2n^3+4}\right)}{[n^{1/3}]^{9\alpha}}$$
$$\sim \frac{\left(\frac{2}{5n^2}-\frac{n}{2n^3}\right)}{n^{3\alpha}} = -\frac{1}{10n^{3\alpha+2}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -2/3, \\ -1/10 & \text{se } \alpha = -2/3, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -2/3. \end{cases}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = -\frac{2(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+9}}\left[\frac{y^2(x)}{9}+1\right]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$3\arctan[y(x)/3] = \left(\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{3}\right)^2}\,dy\right)\Big|_{y=y(x)} = -\int\frac{2(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+9}}\,dx = -2\sqrt{(x+1)^2+9}+C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{3\pi}{4} = 3\arctan 1 = -6+C$, ovvero $C = (3\pi+24)/4$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = 3\tan\left[\pi/4+2-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^2+9}\right]\,.$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos^2(2x) = \frac{\cos(4x)+1}{2}$, otteniamo

$$\int_0^{\pi/16}\frac{\tan(4x)}{1+\tan^2(2x)}\,dx = \int_0^{\pi/16}\frac{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{\frac{\cos^2(2x)+\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)}}\,dx = \int_0^{\pi/16}\frac{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{\frac{1}{\cos^2(2x)}}\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/16}\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}\cos^2(2x)\,dx = \int_0^{\pi/16}\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}\,\frac{\cos(4x)+1}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/16}\sin(4x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/16}\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}\,dx = -\frac{\cos(4x)}{2\cdot 4}\Big|_0^{\pi/16}-\frac{\log[\cos(4x)]}{2\cdot 4}\Big|_0^{\pi/16}$$
$$= -\frac{1}{8}\big[\cos(\pi/4)-1+\log[\cos(\pi/4)]\big] = -\frac{1}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\log 2\,.$$

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 \mathrm{e}^{x^2} - x^2 f(x^2)] \leq 0\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \to +\infty$ (cioè per $x > 0$), dividendo per x^3, ricaviamo

$$\mathrm{e}^{x^2} - f(x^2) \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{x^2} \leq f(x^2)\,,$$

ovvero $f(x^2) \geq \mathrm{e}^{x^2} \to +\infty$, per $x \to +\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema del confronto.

TEMA D

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 1$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 1$, in quanto

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1+x^3)\sin\left[2\log\left(1+(x-1)^2\right)\right]}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\log 2)2(x-1)^2}{(x-1)} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan\left[(\log 4)(x-1)\right] = 0 = f(1)\,,$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\left[\frac{\log[1+(1+t)^3]\sin\left[2\log\left(1+t^2\right)\right]}{t} - 0\right] = \lim_{t\to 0^-}\left[\frac{(\log 2)2t^2}{t^2}\right] = \log 4\,,$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big[\arctan\left[(\log 4)t\right] - 0\Big] = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\log 4)t}{t} = \log 4\,.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\log 4)(x-1)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2+2} \to 0$, otteniamo

$$a_n := [n^2 - \log(n^7)]^\alpha \left(\mathrm{e}^{\frac{n+1}{n^2+2}} - 1 - \frac{3}{n+2}\right) \sim [n^2]^\alpha \left(\frac{n+1}{n^2+2} - \frac{3}{n+2}\right)$$

$$\sim n^{2\alpha}\left(\frac{n}{n^2} - \frac{3}{n}\right) = -\frac{2}{n^{1-2\alpha}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1/2, \\ -2 & \text{se } \alpha = 1/2, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1/2. \end{cases}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\left[\frac{y^2(x)}{3} + 1\right]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\sqrt{3}\arctan[y(x)/\sqrt{3}] = \left(\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dy\right)\Bigg|_{y=y(x)} = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx = \sqrt{(x+1)^2+1} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{\sqrt{3}\pi}{4} = \sqrt{3}\arctan 1 = 1 + C$, ovvero $C = (\sqrt{3}\pi - 4)/4$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{3}\tan\left[\pi/4 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x+1)^2+1}\right]\,.$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$, otteniamo

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\tan(2x)}{1+\tan^2(4x)}\,dx = \int_0^{\pi/8} \frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{\frac{\cos^2(8x)+\sin^2(8x)}{\cos^2(8x)}}\,dx = \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\cos^2(8x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,[2\cos^2(2x) - 1]^2\,dx = \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,[4\cos^4(2x) - 4\cos^2(2x) + 1]\,dx$$

$$=4\int_0^{\pi/8} \sin(2x)\,\cos^3(2x) - 4\int_0^{\pi/8} \sin(2x)\,\cos(2x) + \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,dx$$

$$= -4\frac{\cos^4(2x)}{4\cdot 2}\Big|_0^{\pi/8} + 4\frac{\cos^2(2x)}{2\cdot 2}\Big|_0^{\pi/8} - \frac{\log[\cos(2x)]}{2}\Big|_0^{\pi/8}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\cos^4(\pi/4) + 1 + 2\cos^2(\pi/4) - 2 - \log[\cos(\pi/4)]\Big] = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\log 2\,.$$

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 f(x^2) - x^2 \mathrm{e}^{-x^2}] \geq 0\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \to -\infty$ (cioè per $x < 0$) e ricordando che per ipotesi $f > 0$ su tutto $\mathbb{R}$, dividendo per x^3, ricaviamo

$$f(x^2) - \mathrm{e}^{-x^2} \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x^2) \leq \mathrm{e}^{-x^2}\,,$$

ovvero $0 < f(x^2) \leq \mathrm{e}^{-x^2} \to 0$, per $x \to -\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema dei due carabinieri.