SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 31/03/2014
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

Esercizio 1

Poiché la funzione proposta è di classe $\mathcal{C}^\infty([0,\pi/3])$, per studiarne la monotonia e gli estremanti relativi procediamo calcolandone la derivata prima. Otteniamo in tal modo

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(1+\tan^2 x) - 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2(1+\tan^2 x)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan x\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } \tan x < 1/\sqrt{3} \iff 0 \le x < \pi/6, \\ f'(x) < 0 & \text{se } \tan x > 1/\sqrt{3} \iff \pi/6 < x \le \pi/3, \\ f'(x) = 0 & \text{se } \tan x = 1/\sqrt{3} \iff x = \pi/6. \end{cases}$$

Pertanto, $x_{1,2} = 0; \pi/3$ sono punti di minimo relativo, mentre $x_3 = \pi/6$ è l'unico punto di massimo relativo. Poiché la funzione proposta è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,\pi/3]$, per il Teorema di Weierstrass, essa assume anche massimo e minimo assoluto; pertanto, $x_3 = \pi/6$ è il punto di massimo assoluto, mentre, valutando $f(x_1) = 0$ ed $f(x_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan(\pi/3) - \tan^2(\pi/3) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = -1$, ricaviamo che $x_2 = \pi/3$ è il punto di minimo assoluto.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che $\log(1+x^2+|x|) \ge 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi si tratta di una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice e ricordando che $\sqrt[n]{n^{3/2}} = (\sqrt[n]{n})^{3/2} \to 1$, otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{[\log(1+x^2+|x|)]^n}{n^{3/2}}} \sim \sqrt[n]{[\log(1+x^2+|x|)]^n} = \log(1+x^2+|x|)\,.$$

Pertanto, per $\log(1+x^2+|x|) < 1$ la serie converge, per $\log(1+x^2+|x|) > 1$ la serie diverge, mentre per $\log(1+x^2+|x|) = 1$, il termine generale si riduce a $1/(n^{3/2})$, che fornisce una serie convergente.
Risolvendo, infine, rispetto ad x, otteniamo $\log(1+x^2+|x|) \le 1$ se e solo se $1+x^2+|x| \le \mathrm{e}$; quindi risolvendo l'equazione associata e tenendo conto che $x^2 = |x|^2$, otteniamo

$$|x|^2 + |x| - (\mathrm{e}-1) = 0 \qquad \iff \qquad |x| = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\mathrm{e}-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}\,.$$

Poiché $|x| \ge 0$, ricaviamo

$$|x| \le \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2} \qquad \iff \qquad \frac{1-\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}\,.$$

Pertanto, la serie risulterà convergente per $\frac{1-\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}$, mentre sarà divergente per $x < \frac{1-\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}$ e $x > \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}$.

Esercizio 3

Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate in $(0,-1)$ otteniamo

$$\iint_C \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2+2y+1}}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^r}{r}\,r\,dr\right)d\theta = 2\pi\int_0^2 \mathrm{e}^r\,dr = 2\pi(\mathrm{e}^2-1)\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, cha ha per soluzioni $\lambda = 0; 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$. Inoltre, per il metodo di somiglianza, la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Axe^{2x}$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 2Ae^{2x} - 4Axe^{2x} = 2e^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,.$$

Pertanto, la soluzione dell'equazione completa sarà $y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + xe^{2x}$ Imponendo, infine, le condizioni iniziali, ricaviamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0\,, \\ 2C_2 + 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = 1/2\,, \\ C_2 = -1/2\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà

$$y(x) = 1/2 - 1/2e^{2x} + xe^{2x}\,.$$

Esercizio 5

Prendendo, ad esempio, $a_n = \frac{1}{n\log^2 n} > 0$, per $n \geq 4$, si ricava subito che

$$na_n = \frac{n}{n\log^2 n} = \frac{1}{\log^2 n} \to 0\,, \qquad n^2 a_n = \frac{n^2}{n\log^2 n} = \frac{n}{\log^2 n} \to +\infty\,,$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} a_n = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n} \text{ che converge,} \qquad \sum_{n=4}^{+\infty} (\log n) a_n = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\log n}{n\log^2 n} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} \text{ che diverge.}$$