SOLUZIONI COMPITO del 10/02/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che, effettuando la sostituzione $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$w^2 + 2w + 4 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad w = -1 + \sqrt{1-4} = \begin{cases} 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{2\pi i/3}; \\ 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{4\pi i/3}. \end{cases}$$

Pertanto

$$z_{1,2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{2\pi i/3}} = \begin{cases} \sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi i/3} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{4\pi i/3} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \end{cases} \qquad z_{3,4} = \sqrt{2\mathrm{e}^{4\pi i/3}} = \begin{cases} \sqrt{2}\mathrm{e}^{2\pi i/3} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{5\pi i/3} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{cases}$$

Esercizio 2
Osserviamo, innanzitutto, che si tratta di una serie a segno alterno. Studiamo, quindi, la serie dei valori assoluti, applicando il criterio della radice. In tal modo otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\mathrm{e}^{(\alpha^2+\alpha)n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\,\mathrm{e}^{(\alpha^2+\alpha)} = \mathrm{e}^{(\alpha^2+\alpha)} \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha < -1 \text{ o } \alpha > 0, \\ < 1 & \text{se } -1 < \alpha < 0, \\ = 1 & \text{se } \alpha = -1; 0, \end{cases}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sqrt[n]{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \to 1$.

Pertanto, per $\alpha < -1$ oppure $\alpha > 0$ la serie diverge assolutamente e, come conseguenza del criterio della radice, anche il termine generale diverge (ovvero non soddisfa la condizione necessaria), per cui la serie non converge neppure semplicemente; per $-1 < \alpha < 0$ la serie converge assolutamente e anche semplicemente; infine, per $\alpha = -1; 0$ il criterio non dà alcuna informazione. In tal caso, sostituendo i valori, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

dove la successione $a_n := \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ risulta essere infinitesima, in quanto $a_n \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \to 0$, e monotona decrescente, in quanto, dalla monotonia crescente della funzione $x \mapsto \log x$, si ha

$$\frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n+2}\right) < \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = a_n.$$

Pertanto, per $\alpha = -1; 0$, ricaviamo che la serie proposta converge semplicemente, come conseguenza del criterio di Leibniz; tuttavia essa non converge assolutamente, per confronto con la serie armonica.

Esercizio 3
L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + (2-\alpha)\lambda - 2\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -2; \alpha$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{\alpha x} & \text{se } \alpha \neq -2, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2x\mathrm{e}^{-2x} & \text{se } \alpha = -2. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha \neq 1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^x$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^x$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A\mathrm{e}^x + (2-\alpha)A\mathrm{e}^x - 2\alpha A\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x\,, \quad \Longrightarrow \quad A(1+2-\alpha-2\alpha) = 2\,, \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{2}{3-3\alpha}\,;$$

mentre, per $\alpha = 1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A(x+1)\mathrm{e}^x$ e $y_p''(x) = A(x+2)\mathrm{e}^x$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A(x+2)\mathrm{e}^x + A(x+1)\mathrm{e}^x - 2Ax\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x\,, \quad \Longrightarrow \quad A(2+1) = 2\,, \quad \Longrightarrow \quad A = 2/3\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{\alpha x} + \dfrac{2}{3-3\alpha}\,\mathrm{e}^x & \text{se } \alpha \neq -2; 1, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{x} + \dfrac{2}{3}\,x\mathrm{e}^x & \text{se } \alpha = 1, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2x\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{2}{9}\,\mathrm{e}^x & \text{se } \alpha = -2. \end{cases}$$

Esercizio 4

Il dominio D della funzione proposta è dato da $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Per $x \in D$, la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni continue con il denominatore non nullo, pertanto è continua; tuttavia, poiché

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)^2(1-x)}{x-1} = -4,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x-1} = 4,$$

f non è prolungabile con continuità in $x = 1$. Osserviamo anche che possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\sin(x^2-1)}{x-1} & \text{se } x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty), \\ \dfrac{(x+1)\sin(1-x^2)}{x-1} & \text{se } x \in (-1, 1); \end{cases}$$

quindi per $x \in D \setminus \{-1\}$ la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili con il denominatore non nullo, pertanto è derivabile. Resta da verificare la derivabilità in $x = -1$. Applicando la definizione otteniamo

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)(1-x^2)}{(x-1)(x+1)} = 0,$$

e quindi f risulta derivabile anche in $x = -1$ con $f'(-1) = 0$.

Esercizio 5

i) Per le definizioni e le proprietà si veda il libro di testo. Una funzione con un salto in $x_0 = 1$ è data, per esempio, da $f(x) = [x]$ (dove $[\cdot]$ indica la parte intera), mentre una funzione con una cuspide in $x_0 = -1$ è data, per esempio, da $f(x) = \sqrt{|x+1|}$.

ii) Osserviamo che l'affermazione a) è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione definita da $f(x) = 2$ per $x \geq 0$ ed $f(x) = 1$ per $x < 0$, che presenta un salto in $x = 0$. L'affermazione b), invece, è corretta, poiché corrisponde ad affermare che f è continua in $x_0 = 1$ e se una funzione è derivabile, sappiamo che essa è anche continua. Infine, l'affermazione c) è falsa, basta considerare la funzione studiata in classe, definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

la cui derivata è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ed è tale che

$$f'(0) = 0 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \nexists\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che, effettuando la sostituzione $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$w^2 - i\sqrt{3}w - 1 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad w = \frac{i\sqrt{3} + \sqrt{-3+4}}{2} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathrm{e}^{\pi i/3}; \\ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathrm{e}^{2\pi i/3}. \end{cases}$$

Pertanto

$$z_{1,2} = \sqrt{\mathrm{e}^{\pi i/3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\pi i/6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right); \\ \mathrm{e}^{7\pi i/6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right); \end{cases} \qquad z_{3,4} = \sqrt{\mathrm{e}^{2\pi i/3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\pi i/3} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\ \mathrm{e}^{4\pi i/3} = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che si tratta di una serie a segno alterno. Studiamo, quindi, la serie dei valori assoluti, applicando il criterio della radice. In tal modo otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\alpha^2-\alpha)n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\alpha^2-\alpha)} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\alpha^2-\alpha)} \begin{cases} < 1 & \text{se } \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1, \\ > 1 & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ = 1 & \text{se } \alpha = 1; 0, \end{cases}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \to 1$. Pertanto, per $0 < \alpha < 1$ la serie diverge assolutamente e, come conseguenza del criterio della radice, anche il termine generale diverge (ovvero non soddisfa la condizione necessaria), per cui la serie non converge neppure semplicemente; per $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 1$ la serie converge assolutamente e anche semplicemente; infine, per $\alpha = 1; 0$ il criterio non dà alcuna informazione. In tal caso, sostituendo i valori, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

dove la successione $a_n := \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ risulta essere infinitesima, in quanto $a_n \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \to 0$, e monotona decrescente, in quanto, dalla monotonia crescente della funzione $x \mapsto \sin x$ per $x \in (0, \pi/2)$, si ha

$$\frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \sin\left(\frac{1}{n+2}\right) < \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = a_n.$$

Pertanto, per $\alpha = 1; 0$, ricaviamo che la serie proposta converge semplicemente, come conseguenza del criterio di Leibniz; tuttavia essa non converge assolutamente, per confronto con la serie armonica.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - (3-\alpha)\lambda - 3\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 3; -\alpha$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{se } \alpha \neq -3, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2 x\mathrm{e}^{3x} & \text{se } \alpha = -3. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha \neq 1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = -A\mathrm{e}^{-x}$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-x}$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A\mathrm{e}^{-x} + (3-\alpha)A\mathrm{e}^{-x} - 3\alpha A\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}, \quad \Longrightarrow \quad A(1+3-\alpha-3\alpha) = 1, \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{4-4\alpha};$$

mentre, per $\alpha = 1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = A(1-x)\mathrm{e}^{-x}$ e $y_p''(x) = A(x-2)\mathrm{e}^{-x}$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A(x-2)\mathrm{e}^{-x} - 2A(1-x)\mathrm{e}^{-x} - 3Ax\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\,, \quad \Longrightarrow \quad A(-2-2) = 1\,, \quad \Longrightarrow \quad A = -1/4\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha x} + \dfrac{1}{4-4\alpha}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } \alpha \neq -3; 1, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{4}\,x\mathrm{e}^{-x} & \text{se } \alpha = 1, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2x\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{16}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } \alpha = -3. \end{cases}$$

Esercizio 4

Il dominio D della funzione proposta è dato da $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Per $x \in D$, la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni continue con il denominatore non nullo, pertanto è continua; tuttavia, poiché

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)|x^2-4|}{2+x} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)^2(x+2)}{2+x} = 16,$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)|x^2-4|}{2+x} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-(x-2)^2(x+2)}{2+x} = -16,$$

f non è prolungabile con continuità in $x = -2$. Osserviamo anche che possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\sin(x^2-4)}{2+x} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup [2, +\infty), \\ \dfrac{(x-2)\sin(4-x^2)}{2+x} & \text{se } x \in (-2, 2); \end{cases}$$

quindi per $x \in D \setminus \{2\}$ la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili con il denominatore non nullo, pertanto è derivabile. Resta da verificare la derivabilità in $x = 2$. Applicando la definizione otteniamo

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(4-x^2)}{(2+x)(x-2)} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^2-4)}{(2+x)(x-2)} = 0,$$

e quindi f risulta derivabile anche in $x = 2$ con $f'(2) = 0$.

Esercizio 5

i) Per le definizioni e le proprietà si veda il libro di testo. Una funzione con un salto in $x_0 = -2$ è data, per esempio, da $f(x) = [x]$ (dove $[\cdot]$ indica la parte intera), mentre una funzione con un angolo in $x_0 = 2$ è data, per esempio, da $f(x) = |x-2|$.

ii) Osserviamo che l'affermazione a) è corretta, poiché corrisponde ad affermare che f è continua in $x_0 = 1$ e se una funzione è derivabile, sappiamo che essa è anche continua. L'affermazione b), invece, è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione definita da $f(x) = x$ per $x \neq 0$ ed $f(0) = 1$ per $x = 0$, che presenta un punto di discontinuità eliminabile in $x = 0$. Infine, l'affermazione c) è falsa, basta considerare la funzione studiata in classe, definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

la cui derivata è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ed è tale che

$$f'(0) = 0 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \nexists\,.$$

TEMA C

Esercizio 1
Osserviamo che, effettuando la sostituzione $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$w^2 + i\sqrt{3}w - 1 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad w = \frac{-i\sqrt{3} + \sqrt{-3+4}}{2} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathrm{e}^{5\pi i/3}; \\ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathrm{e}^{4\pi i/3}. \end{cases}$$

Pertanto

$$z_{1,2} = \sqrt{\mathrm{e}^{5\pi i/3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{5\pi i/6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right); \\ \mathrm{e}^{11\pi i/6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right); \end{cases} \qquad z_{3,4} = \sqrt{\mathrm{e}^{4\pi i/3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{2\pi i/3} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\ \mathrm{e}^{5\pi i/3} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{cases}$$

Esercizio 2
Osserviamo, innanzitutto, che si tratta di una serie a segno alterno. Studiamo, quindi, la serie dei valori assoluti, applicando il criterio della radice. In tal modo otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\alpha^2+\alpha)n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\alpha^2+\alpha)} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\alpha^2+\alpha)} \begin{cases} < 1 & \text{se } \alpha < -1 \text{ o } \alpha > 0, \\ > 1 & \text{se } -1 < \alpha < 0, \\ = 1 & \text{se } \alpha = -1; 0, \end{cases}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{n+2}} \to 1$. Pertanto, per $-1 < \alpha < 0$ la serie diverge assolutamente e, come conseguenza del criterio della radice, anche il termine generale diverge (ovvero non soddisfa la condizione necessaria), per cui la serie non converge neppure semplicemente; per $\alpha < -1$ oppure $\alpha > 0$ la serie converge assolutamente e anche semplicemente; infine, per $\alpha = -1; 0$ il criterio non dà alcuna informazione. In tal caso, sostituendo i valori, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

dove la successione $a_n := \sin\left(\frac{1}{n+2}\right)$ risulta essere infinitesima, in quanto $a_n \sim \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n} \to 0$, e monotona decrescente, in quanto, dalla monotonia crescente della funzione $x \mapsto \sin x$ per $x \in (0, \pi/2)$, si ha

$$\frac{1}{(n+1)+2} = \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{n+1} = \sin\left(\frac{1}{n+3}\right) < \sin\left(\frac{1}{n+2}\right) = a_n.$$

Pertanto, per $\alpha = -1; 0$, ricaviamo che la serie proposta converge semplicemente, come conseguenza del criterio di Leibniz; tuttavia essa non converge assolutamente, per confronto con la serie armonica.

Esercizio 3
L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + (3-\alpha)\lambda - 3\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -3; \alpha$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^{\alpha x} & \text{se } \alpha \neq -3, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2 x\mathrm{e}^{-3x} & \text{se } \alpha = -3. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha \neq -1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = -A\mathrm{e}^{-x}$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-x}$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A\mathrm{e}^{-x} - (3-\alpha)A\mathrm{e}^{-x} - 3\alpha A\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x}\,, \quad \Longrightarrow \quad A(1 - 3 + \alpha - 3\alpha) = 2\,, \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{1+\alpha}\,;$$

mentre, per $\alpha = -1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = A(1-x)\mathrm{e}^{-x}$ e $y_p''(x) = A(x-2)\mathrm{e}^{-x}$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A(x-2)\mathrm{e}^{-x} + 4A(1-x)\mathrm{e}^{-x} + 3Ax\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x}\,, \quad \Longrightarrow \quad A(-2+4) = 2\,, \quad \Longrightarrow \quad A = 1\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^{\alpha x} - \dfrac{1}{1+\alpha}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } \alpha \neq -3; -1, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} & \text{se } \alpha = -1, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2x\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } \alpha = -3. \end{cases}$$

Esercizio 4

Il dominio D della funzione proposta è dato da $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Per $x \in D$, la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni continue con il denominatore non nullo, pertanto è continua; tuttavia, poiché

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)|x^2-4|}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)^2(2-x)}{2-x} = 16,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)|x^2-4|}{2-x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)^2(x-2)}{2-x} = -16,$$

f non è prolungabile con continuità in $x = 2$. Osserviamo anche che possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)\sin(x^2-4)}{2-x} & \text{se } x \in (-\infty, -2] \cup (2, +\infty), \\ \dfrac{(x+2)\sin(4-x^2)}{2-x} & \text{se } x \in (-2, 2); \end{cases}$$

quindi per $x \in D \setminus \{-2\}$ la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili con il denominatore non nullo, pertanto è derivabile. Resta da verificare la derivabilità in $x = -2$. Applicando la definizione otteniamo

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x^2-4)}{(2-x)(x+2)} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x+2)(4-x^2)}{(2-x)(x+2)} = 0,$$

e quindi f risulta derivabile anche in $x = -2$ con $f'(-2) = 0$.

Esercizio 5

i) Per le definizioni e le proprietà si veda il libro di testo. Una funzione con un salto in $x_0 = -2$ è data, per esempio, da $f(x) = [x]$ (dove $[\cdot]$ indica la parte intera), mentre una funzione con un angolo in $x_0 = 2$ è data, per esempio, da $f(x) = |x-2|$.

ii) Osserviamo che l'affermazione a) è corretta, poiché corrisponde ad affermare che f è continua in $x_0 = 1$ e se una funzione è derivabile, sappiamo che essa è anche continua. L'affermazione b), invece, è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione definita da $f(x) = x$ per $x \neq 0$ ed $f(0) = 1$ per $x = 0$, che presenta un punto di discontinuità eliminabile in $x = 0$. Infine, l'affermazione c) è falsa, basta considerare la funzione studiata in classe, definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

la cui derivata è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ed è tale che

$$f'(0) = 0 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \nexists\,.$$

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che, effettuando la sostituzione $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$w^2 - 2w + 4 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad w = 1 + \sqrt{1-4} = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\pi i/3}; \\ 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{5\pi i/3}. \end{cases}$$

Pertanto

$$z_{1,2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{\pi i/3}} = \begin{cases} \sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi i/6} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right); \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{7\pi i/6} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right); \end{cases} \quad z_{3,4} = \sqrt{2\mathrm{e}^{5\pi i/3}} = \begin{cases} \sqrt{2}\mathrm{e}^{5\pi i/6} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right); \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{11\pi i/6} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che si tratta di una serie a segno alterno. Studiamo, quindi, la serie dei valori assoluti, applicando il criterio della radice. In tal modo otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)} = \mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)} \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1, \\ < 1 & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ = 1 & \text{se } \alpha = 1; 0, \end{cases}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sqrt[n]{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$. Pertanto, per $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 1$ la serie diverge assolutamente e, come conseguenza del criterio della radice, anche il termine generale diverge (ovvero non soddisfa la condizione necessaria), per cui la serie non converge neppure semplicemente; per $0 < \alpha < 1$ la serie converge assolutamente e anche semplicemente; infine, per $\alpha = 1; 0$ il criterio non dà alcuna informazione. In tal caso, sostituendo i valori, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

dove la successione $a_n := \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ risulta essere infinitesima, in quanto $a_n \sim \frac{1}{n} \to 0$, e monotona decrescente, in quanto, dalla monotonia crescente della funzione $x \mapsto \log x$, si ha

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n.$$

Pertanto, per $\alpha = 1; 0$, ricaviamo che la serie proposta converge semplicemente, come conseguenza del criterio di Leibniz; tuttavia essa non converge assolutamente, per confronto con la serie armonica.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - (2-\alpha)\lambda - 2\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2; -\alpha$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{se } \alpha \neq -2, \\ y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\mathrm{e}^{2x} & \text{se } \alpha = -2. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha \neq -1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^x$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^x$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A\mathrm{e}^x - (2-\alpha)A\mathrm{e}^x - 2\alpha A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,, \quad \Longrightarrow \quad A(1-2+\alpha-2\alpha) = 1\,, \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{1+\alpha}\,;$$

mentre, per $\alpha = -1$, una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Axe^x$, da cui $y_p'(x) = A(x+1)e^x$ e $y_p''(x) = A(x+2)e^x$, che sostituiti nell'equazione completa forniscono

$$A(x+2)e^x - 3A(x+1)e^x + 2Axe^x = e^x\,, \quad \Longrightarrow \quad A(2-3) = 1\,, \quad \Longrightarrow \quad A = -1\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$\begin{cases} y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\alpha x} - \frac{1}{1+\alpha}\, e^x & \text{se } \alpha \neq -2; -1, \\ y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} - xe^x & \text{se } \alpha = -1, \\ y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + e^x & \text{se } \alpha = -2. \end{cases}$$

Esercizio 4

Il dominio D della funzione proposta è dato da $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per $x \in D$, la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni continue con il denominatore non nullo, pertanto è continua; tuttavia, poiché

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-1)|x^2-1|}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-1)^2(x+1)}{x+1} = 4,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)|x^2-1|}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x-1)^2(x+1)}{x+1} = -4,$$

f non è prolungabile con continuità in $x = -1$. Osserviamo anche che possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\sin(x^2-1)}{x+1} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty), \\ \dfrac{(x-1)\sin(1-x^2)}{x+1} & \text{se } x \in (-1, 1); \end{cases}$$

quindi per $x \in D \setminus \{1\}$ la funzione proposta è composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili con il denominatore non nullo, pertanto è derivabile. Resta da verificare la derivabilità in $x = 1$. Applicando la definizione otteniamo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(1-x^2)}{(x+1)(x-1)} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)} = 0,$$

e quindi f risulta derivabile anche in $x = 1$ con $f'(1) = 0$.

Esercizio 5

i) Per le definizioni e le proprietà si veda il libro di testo. Una funzione con un salto in $x_0 = 1$ è data, per esempio, da $f(x) = [x]$ (dove $[\cdot]$ indica la parte intera), mentre una funzione con una cuspide in $x_0 = -1$ è data, per esempio, da $f(x) = \sqrt{|x+1|}$.

ii) Osserviamo che l'affermazione a) è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione definita da $f(x) = 2$ per $x \geq 0$ ed $f(x) = 1$ per $x < 0$, che presenta un salto in $x = 0$. L'affermazione b), invece, è corretta, poiché corrisponde ad affermare che f è continua in $x_0 = 1$ e se una funzione è derivabile, sappiamo che essa è anche continua. Infine, l'affermazione c) è falsa, basta considerare la funzione studiata in classe, definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

la cui derivata è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ed è tale che

$$f'(0) = 0 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \nexists\,.$$