SOLUZIONI COMPITO del 13/02/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Innanzitutto poniamo le condizionoi di esistenza dell'equazione che sono $z \neq -3; 3i$; facciamo, poi, il comun denominatore e otteniamo

$$z(\bar{z}+3i) = \bar{z}(z+3) \quad \Longrightarrow \quad |z|^2 + 3zi = |z|^2 + 3\bar{z} \quad \Longrightarrow \quad zi = \bar{z}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Riscrivendo, ora, $z = x + iy$, dall'ultima equazione ricaviamo

$$ix - y = x - iy \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -y = x\,, \\ x = -y\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = -x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi esistono un'infinità di soluzioni della forma $z = x - ix$, $x \in \mathbb{R}$, che soddisfano sempre le condizioni d'esistenza e che rappresentano i punti della bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Esercizio 2

Ricordando lo sviluppo al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, con $x = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}$, ovvero

$$\exp\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 1 + \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e tenendo conto che $\sin\frac{2}{n^2} \sim \frac{2}{n^2}$, ricaviamo

$$\frac{\exp\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) - 1 - \frac{(\alpha^2-1)}{n}}{\sin\frac{2}{n^2}} = \frac{\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{(\alpha^2-1)}{n}}{2/n^2}$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{[2-(\alpha^2-1)]/n}{2/n^2} = \dfrac{(3-\alpha^2)}{2}\, n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{3} \text{ o } \alpha > \sqrt{3}, \end{cases} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{3}, \\ \dfrac{3/n^2 + 2/n^2}{2/n^2} = \dfrac{5}{2} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Esercizio 3

Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = \mathrm{e}^{2x}(A\cos x + B\sin x)$ da cui $y_p'(x) = \mathrm{e}^{2x}(2A\cos x + 2B\sin x - A\sin x + B\cos x)$ e $y''(x) = \mathrm{e}^{2x}(4A\cos x + 4B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 2A\sin x + 2B\cos x - A\cos x - B\sin x)$. Inserendo nell'equazione completa e semplificando ambo i membri per il fattore positivo e^{2x} ricaviamo

$$\begin{aligned}&[(4A\cos x + 4B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 2A\sin x + 2B\cos x - A\cos x - B\sin x) - 4(A\cos x + B\sin x)] \\ &\quad = 17\cos x\end{aligned}$$

che implica

$$\begin{cases} 4A + 2B + 2B - A - 4A = 17, \\ 4B - 2A - 2A - B - 4B = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4B - A = 17, \\ -4A - B = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -4A, \\ -16A - A = 17, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = 4, \\ A = -1. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x}(4\sin x - \cos x)$, che risulta essere limitata per $x \to -\infty$ se e solo se $C_2 = 0$. Quindi avremo infinite soluzioni soddisfacenti la condizione richiesta date da $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}(4\sin x - \cos x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4
Osserviamo che la funzione integranda f è definita e continua in $[1, +\infty)$, quindi va studiata solo per $x \to +\infty$. Tenendo conto che $\tanh \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$, per $x \to +\infty$, e che

$$\arctan\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^{2/3}} + \frac{3}{x^5}} - 1\right) \sim \sqrt{1 + \frac{1}{x^{2/3}} + \frac{3}{x^5}} - 1 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{3}{x^5}\right) \sim \frac{1}{2x^{2/3}}\,,$$

otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1/(x^{2\alpha})}{1/(2x^{2/3})} = \frac{2}{x^{2\alpha-2/3}}\,,$$

che, per confronto, risulta impropriamente integrabile per $x \to +\infty$ se e solo se $2\alpha - 2/3 > 1$, ovvero $\alpha > 5/6$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Osserviamo che la funzione $f(x) = \cos x - 2\sin x + x - 1/2$ soddisfa

$$f(0) = \frac{1}{2} > 0\,, \qquad f(\pi/2) = -\frac{5}{2} + \frac{\pi}{2} < 0\,, \qquad f(\pi) = -\frac{3}{2} + \pi > 0\,.$$

Pertanto, dal Teorema degli zeri applicato alla funzione $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi])$, una volta nell'intervallo $[0, \pi/2]$ ed una volta nell'intervallo $[\pi/2, \pi]$, si ha che esistono un punto $x_0 \in (0, \pi/2)$ e un punto $x_1 \in (\pi/2, \pi)$ tali che $f(x_0) = 0 = f(x_1)$, ovvero x_0 e x_1 sono soluzioni dell'equazione proposta.

TEMA B

Esercizio 1
Innanzitutto poniamo le condizionoi di esistenza dell'equazione che sono $z \neq 1; i$; facciamo, poi, il comun denominatore e otteniamo

$$z(\bar{z}+i) = -\bar{z}(1-z) \quad \Longrightarrow \quad |z|^2 + zi = -\bar{z} + |z|^2 \quad \Longrightarrow \quad zi = -\bar{z}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Riscrivendo, ora, $z = x + iy$, dall'ultima equazione ricaviamo

$$ix - y = -x + iy \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -y = -x\,, \\ x = y\,, \\ \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi esistono un'infinità di soluzioni della forma $z = x + ix$, $x \in \mathbb{R}$, che soddisfano sempre le condizioni d'esistenza e che rappresentano i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante.

Esercizio 2
Ricordando lo sviluppo al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$, ovvero

$$\log\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \left(\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e tenendo conto che $\tan\frac{3}{n^2} \sim \frac{3}{n^2}$, ricaviamo

$$\frac{\frac{(\alpha^2-2)}{n} - \log\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\tan\frac{3}{n^2}} = \frac{\frac{(\alpha^2-2)}{n} - \left(\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{3/n^2}$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{[(\alpha^2-2)-3]/n}{3/n^2} = \dfrac{(\alpha^2-5)}{3}\, n \to \begin{cases} -\infty & \text{se } -\sqrt{5} < \alpha < \sqrt{5}, \\ +\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{5} \text{ o } \alpha > \sqrt{5}, \end{cases} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{5}, \\ \dfrac{-2/n^2 + 9/2n^2}{3/n^2} = \dfrac{5}{6} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Esercizio 3
Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea sarà $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$ da cui $y_p'(x) = e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x + B\cos x)$ e $y''(x) = e^{-2x}(4A\cos x + 4B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x + 2A\sin x - 2B\cos x - A\cos x - B\sin x)$. Inserendo nell'equazione completa e semplificando ambo i membri per il fattore positivo e^{-2x} ricaviamo

$$\begin{aligned}&[(4A\cos x + 4B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x + 2A\sin x - 2B\cos x - A\cos x - B\sin x) - 4(A\cos x + B\sin x)] \\ &\quad = -17\sin x\end{aligned}$$

che implica

$$\begin{cases} 4A - 2B - 2B - A - 4A = 0, \\ 4B + 2A + 2A - B - 4B = -17, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4B - A = 0, \\ 4A - B = -17, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -4B, \\ -16B - B = -17, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = 1, \\ A = -4. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{-2x}(\sin x - 4\cos x)$, che risulta essere limitata per $x \to +\infty$ se e solo se $C_1 = 0$. Quindi avremo infinite soluzioni soddisfacenti la condizione richiesta date da $y(x) = C_2 e^{-2x} + e^{-2x}(\sin x - 4\cos x)$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione integranda f è definita e continua in $[1,+\infty)$, quindi va studiata solo per $x \to +\infty$. Tenendo conto che, per $\alpha > 0$, $\sinh \frac{1}{x^{2\alpha}} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$, per $x \to +\infty$, e che

$$\arctan\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^{5/3}}+\frac{3}{x^2}}-1\right) \sim \sqrt{1+\frac{4}{x^{5/3}}+\frac{3}{x^2}}-1 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^{5/3}}+\frac{3}{x^2}\right) \sim \frac{2}{x^{5/3}}\,,$$

otteniamo

$$f(x) \sim \frac{2/(x^{5/3})}{1/(x^{4\alpha})} = \frac{2}{x^{5/3-4\alpha}}\,,$$

che, per confronto, risulta impropriamente integrabile per $x \to +\infty$ se e solo se $5/3 - 4\alpha > 1$, ovvero $0 < \alpha < 1/6$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Osserviamo che la funzione $f(x) = \sin x - 2\cos x + 4|x| - 1$ soddisfa

$$f(-\pi/2) = -2 + 2\pi > 0\,, \qquad f(0) = -2 < 0\,, \qquad f(\pi/2) = 2\pi > 0\,.$$

Pertanto, dal Teorema degli zeri applicato alla funzione $f \in \mathcal{C}^0([-\pi/2,\pi/2])$, una volta nell'intervallo $[-\pi/2, 0]$ ed una volta nell'intervallo $[0,\pi/2]$, si ha che esistono un punto $x_0 \in (-\pi/2, 0)$ e un punto $x_1 \in (0,\pi/2)$ tali che $f(x_0) = 0 = f(x_1)$, ovvero x_0 e x_1 sono soluzioni dell'equazione proposta.

TEMA C

Esercizio 1
Innanzitutto poniamo le condizionoi di esistenza dell'equazione che sono $z \neq 4; -4i$; facciamo, poi, il comun denominatore e otteniamo

$$z(4i - \bar{z}) = \bar{z}(4 - z) \quad \Longrightarrow \quad 4zi - |z|^2 = 4\bar{z} - |z|^2 \quad \Longrightarrow \quad zi = \bar{z}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Riscrivendo, ora, $z = x + iy$, dall'ultima equazione ricaviamo

$$ix - y = x - iy \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -y = x\,, \\ x = -y\,, \\ \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = -x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi esistono un'infinità di soluzioni della forma $z = x - ix$, $x \in \mathbb{R}$, che soddisfano sempre le condizioni d'esistenza e che rappresentano i punti della bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Esercizio 2
Ricordando lo sviluppo al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1 + x)$, con $x = \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}$, ovvero

$$\log\left(1 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) = \left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e tenendo conto che $\tan\frac{5}{n^2} \sim \frac{5}{n^2}$, ricaviamo

$$\frac{\frac{(\alpha^2-3)}{n} - \log\left(1 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right)}{\tan\frac{5}{n^2}} = \frac{\frac{(\alpha^2-3)}{n} - \left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{5/n^2}$$
$$\sim \begin{cases} \dfrac{[(\alpha^2 - 3) - 4]/n}{5/n^2} = \dfrac{(\alpha^2 - 7)}{5} n \to \begin{cases} -\infty & \text{se } -\sqrt{7} < \alpha < \sqrt{7}, \\ +\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{7} \text{ o } \alpha > \sqrt{7}, \end{cases} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{7}, \\ \dfrac{3/n^2 + 8/n^2}{5/n^2} = \dfrac{11}{5} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

Esercizio 3
Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 9 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 3$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea sarà $y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$ da cui $y_p'(x) = e^{-3x}(-3A\cos x - 3B\sin x - A\sin x + B\cos x)$ e $y''(x) = e^{-3x}(9A\cos x + 9B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 3A\sin x - 3B\cos x - A\cos x - B\sin x)$. Inserendo nell'equazione completa e semplificando ambo i membri per il fattore positivo e^{-3x} ricaviamo

$$\begin{aligned}&[(9A\cos x + 9B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 3A\sin x - 3B\cos x - A\cos x - B\sin x) - 9(A\cos x + B\sin x)] \\ &\quad = -37\sin x\end{aligned}$$

che implica

$$\begin{cases} 9A - 3B - 3B - A - 9A = 0, \\ 9B + 3A + 3A - B - 9B = -37, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -6B - A = 0, \\ 6A - B = -37, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -6B, \\ -36B - B = -37, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = 1, \\ A = -6. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{-3x}(\sin x - 6\cos x)$, che risulta essere limitata per $x \to +\infty$ se e solo se $C_1 = 0$. Quindi avremo infinite soluzioni soddisfacenti la condizione richiesta date da $y(x) = C_2 e^{-3x} + e^{-3x}(\sin x - 6\cos x)$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione integranda f è definita e continua in $[1, +\infty)$, quindi va studiata solo per $x \to +\infty$. Tenendo conto che, per $\alpha > 0$, $\sinh \frac{1}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}$, per $x \to +\infty$, e che

$$\arctan\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^{9/2}}}-1\right) \sim \sqrt{1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^{9/2}}}-1 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^{9/2}}\right) \sim \frac{3}{2x^3}\,,$$

otteniamo

$$f(x) \sim \frac{3/(2x^3)}{1/(x^{3\alpha})} = \frac{3}{2x^{3-3\alpha}}\,,$$

che, per confronto, risulta impropriamente integrabile per $x \to +\infty$ se e solo se $3 - 3\alpha > 1$, ovvero $0 < \alpha < 2/3$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Osserviamo che la funzione $f(x) = \sin x - 2\cos x + 4|x| - 1$ soddisfa

$$f(-\pi/2) = -2 + 2\pi > 0\,, \qquad f(0) = -2 < 0\,, \qquad f(\pi/2) = 2\pi > 0\,.$$

Pertanto, dal Teorema degli zeri applicato alla funzione $f \in \mathcal{C}^0([-\pi/2, \pi/2])$, una volta nell'intervallo $[-\pi/2, 0]$ ed una volta nell'intervallo $[0, \pi/2]$, si ha che esistono un punto $x_0 \in (-\pi/2, 0)$ e un punto $x_1 \in (0, \pi/2)$ tali che $f(x_0) = 0 = f(x_1)$, ovvero x_0 e x_1 sono soluzioni dell'equazione proposta.

TEMA D

Esercizio 1

Innanzitutto poniamo le condizionoi di esistenza dell'equazione che sono $z \neq 2; 2i$; facciamo, poi, il comun denominatore e otteniamo

$$z(\bar{z} + 2i) = \bar{z}(z - 2) \quad \Longrightarrow \quad |z|^2 + 2zi = |z|^2 - 2\bar{z} \quad \Longrightarrow \quad zi = -\bar{z}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Riscrivendo, ora, $z = x + iy$, dall'ultima equazione ricaviamo

$$ix - y = -x + iy \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -y = -x\,, \\ x = y\,, \\ \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi esistono un'infinità di soluzioni della forma $z = x + ix$, $x \in \mathbb{R}$, che soddisfano sempre le condizioni d'esistenza e che rappresentano i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante.

Esercizio 2

Ricordando lo sviluppo al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, con $x = \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}$, ovvero

$$\exp\left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = 1 + \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e tenendo conto che $\sin\frac{4}{n^2} \sim \frac{4}{n^2}$, ricaviamo

$$\frac{\exp\left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right) - 1 - \frac{(\alpha^2-3)}{n}}{\sin\frac{4}{n^2}} = \frac{\left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{(\alpha^2-3)}{n}}{4/n^2}$$
$$\sim \begin{cases} \dfrac{[3-(\alpha^2-3)]/n}{4/n^2} = \dfrac{(6-\alpha^2)}{4}\, n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } -\sqrt{6} < \alpha < \sqrt{6}, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{6} \text{ o } \alpha > \sqrt{6}, \end{cases} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{6}, \\ \dfrac{-2/n^2 + 9/2n^2}{4/n^2} = \dfrac{5}{8} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{6}. \end{cases}$$

Esercizio 3

Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 9 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 3$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = \mathrm{e}^{3x}(A\cos x + B\sin x)$ da cui $y_p'(x) = \mathrm{e}^{3x}(3A\cos x + 3B\sin x - A\sin x + B\cos x)$ e $y''(x) = \mathrm{e}^{3x}(9A\cos x + 9B\sin x - 3A\sin x + 3B\cos x - 3A\sin x + 3B\cos x - A\cos x - B\sin x)$. Inserendo nell'equazione completa e semplificando ambo i membri per il fattore positivo e^{3x} ricaviamo

$$\begin{aligned} &[(9A\cos x + 9B\sin x - 3A\sin x + 3B\cos x - 3A\sin x + 3B\cos x - A\cos x - B\sin x) - 9(A\cos x + B\sin x)] \\ &\quad = 37\cos x \end{aligned}$$

che implica

$$\begin{cases} 9A + 3B + 3B - A - 9A = 37, \\ 9B - 3A - 3A - B - 9B = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6B - A = 37, \\ -6A - B = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -6A, \\ -36A - A = 37, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = 6, \\ A = -1. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x}(6\sin x - \cos x)$, che risulta essere limitata per $x \to -\infty$ se e solo se $C_2 = 0$. Quindi avremo infinite soluzioni soddisfacenti la condizione richiesta date da $y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{3x}(6\sin x - \cos x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione integranda f è definita e continua in $[1,+\infty)$, quindi va studiata solo per $x \to +\infty$. Tenendo conto che $\tanh \frac{1}{x^3} \sim \frac{1}{x^3}$, per $x \to +\infty$, e che

$$\arctan\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^{5/2}}}-1\right) \sim \sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^{5/2}}}-1 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^{5/2}}\right) \sim \frac{1}{x^2}\,,$$

otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1/(x^{6\alpha})}{1/(x^2)} = \frac{1}{x^{6\alpha-2}}\,,$$

che, per confronto, risulta impropriamente integrabile per $x \to +\infty$ se e solo se $6\alpha - 2 > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Osserviamo che la funzione $f(x) = \cos x - 2\sin x + x - 1/2$ soddisfa

$$f(0) = \frac{1}{2} > 0\,, \qquad f(\pi/2) = -\frac{5}{2} + \frac{\pi}{2} < 0\,, \qquad f(\pi) = -\frac{3}{2} + \pi > 0\,.$$

Pertanto, dal Teorema degli zeri applicato alla funzione $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi])$, una volta nell'intervallo $[0,\pi/2]$ ed una volta nell'intervallo $[\pi/2,\pi]$, si ha che esistono un punto $x_0 \in (0,\pi/2)$ e un punto $x_1 \in (\pi/2,\pi)$ tali che $f(x_0) = 0 = f(x_1)$, ovvero x_0 e x_1 sono soluzioni dell'equazione proposta.