SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 23/03/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA
TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo per ogni $x \in \mathbb{R}$; possiamo quindi procedere utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{\pi^n[\log(1+2x^2)]^n}{n(n^2+2)}} \sim \frac{\pi\log(1+2x^2)}{\sqrt[n]{n\cdot n^2}} \to \pi\log(1+2x^2)\,.$$

Pertanto, la serie risulterà essere convergente se $\pi\log(1+2x^2) < 1$, ovvero per $1+2x^2 < e^{1/\pi}$, che fornisce $-\sqrt{(e^{1/\pi}-1)/2} < x < \sqrt{(e^{1/\pi}-1)/2}$, e sarà, invece, divergente per $x < -\sqrt{(e^{1/\pi}-1)/2}$ e $x > \sqrt{(e^{1/\pi}-1)/2}$. Infine, per $x = \pm\sqrt{(e^{1/\pi}-1)/2}$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = \frac{1}{n(n^2+2)} \sim \frac{1}{n^3}$, che fornisce una serie convergente, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.
In conclusione, la serie proposta convergerà se e solo se $-\sqrt{(e^{1/\pi}-1)/2} \le x \le \sqrt{(e^{1/\pi}-1)/2}$.

Esercizio 2
L'integrale proposto si può risolvere effettuando la sostituzione $t = \sin(x^3)$, da cui $\frac{1}{3}\,dt = x^2\cos(x^3)\,dx$, $t(0) = 0$, $t(\sqrt[3]{\pi/2}) = 1$. Quindi ricaviamo

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi/2}} \frac{x^2\cos(x^3)}{3+\sin(x^3)}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{3+t}\,dt = \frac{1}{3}\log(3+t)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\log 4 - \log 3) = \log\sqrt[3]{4/3}\,.$$

Esercizio 3
Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Poiché $f(x) = -(6x-6) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g(y) = \tan y \in \mathcal{C}^1(-\pi/2, \pi/2)$, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita in un intorno del punto iniziale $x_0 = 2$. L'equazione differenziale ha come soluzioni singolari $y(x) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che però non risolvono la condizione iniziale; quindi, la soluzione del nostro problema andrà cercata tra quelle ottenute per separazione di variabili. Ricaviamo così

$$\log(\sin y) = \int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = -\int (6x-6)\,dx = -3x^2+6x+C\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, dalla condizione iniziale, segue che $y \in (0, \pi/2)$ e quindi $\sin y > 0$. Invertendo la precedente equazione si ricava

$$\sin[(y(x)] = e^{-3x^2+6x+C} \quad\Longrightarrow\quad y(x) = \arcsin\left[e^{-3x^2+6x+C}\right]\,.$$

Imponendo ora la condizione iniziale, otteniamo $\pi/4 = \arcsin(e^C)$, da cui, $C = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La soluzione cercata, pertanto, sarà $y(x) = \arcsin\left[\frac{e^{-3x^2+6x}}{\sqrt{2}}\right]$.

Esercizio 4
Ricordiamo, innanzitutto, che il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di estremanti assoluti nell'intervallo chiuso e limitato $[0,\pi]$ per la funzione assegnata, poiché essa risulta continua. Per determinare estremanti relativi ed assoluti, studiamo la monotonia di f attraverso lo studio del segno della sua derivata. Otteniamo

$$f'(x) = -\sqrt{3} + 4\sin x\cos x = -\sqrt{3} + 2\sin(2x)\begin{cases} > 0 & \text{se } \pi/3 < 2x < 2\pi/3 \text{ ovvero } \pi/6 \le x < \pi/3; \\ = 0 & \text{se } x = \pi/6; \pi/3; \\ < 0 & \text{se } 0 \le x < \pi/6 \text{ o } \pi/3 < x \le \pi. \end{cases}$$

Quindi $x = 0; \pi/3$ sono punti di massimo relativo e $x = \pi/6; \pi$ sono punti di minimo relativo. Confrontando i valori in tali punti otteniamo

$$f(0) = 0 > -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} = f(\pi/3), \qquad 0 > f(\pi/6) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} > -\sqrt{3}\pi = f(\pi).$$

Quindi il punto di massimo assoluto è $x = 0$ e il punto di minimo assoluto è $x = \pi$.

Esercizio 5

L'affermazione A) è vera, in quanto da $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ si ricava subito per l'algebra dei limiti che $(a_n b_n)^n \to +\infty$.

L'affermazione B) è falsa, basta prendere $a_n = n$ e $b_n = n^2$, da cui si ricava che $a_n/b_n = 1/n \to 0^+$.

L'affermazione C) è falsa, basta prendere $a_n = n^2$ e $b_n = n$, da cui si ricava che $b_n/a_n = 1/n \to 0^+$.

L'affermazione D) è vera, in quanto da $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ si ricava subito per l'algebra dei limiti che $a_n^2 b_n^3 \to +\infty$ e quindi $1/a_n^2 b_n^3 \to 0^+$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo per ogni $x \in \mathbb{R}$; possiamo quindi procedere utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{[\log(2+3x^2)]^n}{\pi^n \sqrt{n+3}}} \sim \frac{\log(2+3x^2)}{\pi \sqrt[n]{n+3}} \to \frac{\log(2+3x^2)}{\pi} .$$

Pertanto, la serie risulterà essere convergente se $\frac{\log(2+3x^2)}{\pi} < 1$, ovvero per $2+3x^2 < \mathrm{e}^\pi$, che fornisce $-\sqrt{(\mathrm{e}^\pi - 2)/3} < x < \sqrt{(\mathrm{e}^\pi - 2)/3}$, e sarà, invece, divergente per $x < -\sqrt{(\mathrm{e}^\pi - 2)/3}$ e $x > \sqrt{(\mathrm{e}^\pi - 2)/3}$. Infine, per $x = \pm\sqrt{(\mathrm{e}^\pi - 2)/3}$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, che fornisce una serie divergente, in quanto si tratta della serie armonica generalizzata di esponente $1/2 < 1$.
In conclusione, la serie proposta convergerà se e solo se $-\sqrt{(\mathrm{e}^\pi - 2)/3} < x < \sqrt{(\mathrm{e}^\pi - 2)/3}$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando la sostituzione $t = \cos(\mathrm{e}^x)$, da cui $dt = -\mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^x)\, dx$, $t(\log(\pi/2)) = 0$, $t(\log \pi) = -1$. Quindi ricaviamo

$$\int_{\log(\pi/2)}^{\log \pi} \frac{\mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^x)}{4+\cos(\mathrm{e}^x)}\, dx = -\int_0^{-1} \frac{1}{4+t}\, dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4+t}\, dt = \log(4+t)\Big|_{-1}^{0} = \log 4 - \log 3 = \log(4/3).$$

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Poiché $f(x) = (4x-4) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g(y) = \cot y \in \mathcal{C}^1(0,\pi)$, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita in un intorno del punto iniziale $x_0 = 2$. L'equazione differenziale ha come soluzioni singolari $y(x) = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, che però non risolvono la condizione iniziale; quindi, la soluzione del nostro problema andrà cercata tra quelle ottenute per separazione di variabili. Ricaviamo così

$$-\log(\cos y) = \int \frac{\sin y}{\cos y}\, dy = \int (4x-4)\, dx = 2x^2 - 4x - C\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, dalla condizione iniziale, segue che $y \in (0, \pi/2)$ e quindi $\cos y > 0$. Invertendo la precedente equazione si ricava

$$\cos[(y(x)] = \mathrm{e}^{-2x^2+4x+C} \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \arccos\left[\mathrm{e}^{-2x^2+4x+C}\right] .$$

Imponendo ora la condizione iniziale, otteniamo $\pi/3 = \arccos(\mathrm{e}^C)$, da cui, $C = \log\left(\frac{1}{2}\right)$. La soluzione cercata, pertanto, sarà $y(x) = \arccos\left[\frac{\mathrm{e}^{-2x^2+4x}}{2}\right]$.

Esercizio 4

Ricordiamo, innanzitutto, che il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di estremanti assoluti nell'intervallo chiuso e limitato $[0,\pi]$ per la funzione assegnata, poiché essa risulta continua. Per determinare estremanti relativi ed assoluti, studiamo la monotonia di f attraverso lo studio del segno della sua derivata. Otteniamo

$$f'(x) = -\sqrt{3} - 4\sin x \cos x = -\sqrt{3} - 2\sin(2x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 4\pi/3 < 2x < 5\pi/3 \text{ ovvero } 2\pi/3 \le x < 5\pi/6; \\ = 0 & \text{se } x = 2\pi/3; 5\pi/6; \\ < 0 & \text{se } 0 \le x < 2\pi/3 \text{ o } 5\pi/6 < x \le \pi. \end{cases}$$

Quindi $x = 0; 5\pi/6$ sono punti di massimo relativo e $x = 2\pi/3; \pi$ sono punti di minimo relativo. Confrontando i valori in tali punti otteniamo

$$f(0) = 2 > -\frac{5\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} = f(5\pi/6), \qquad 0 > f(2\pi/3) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} > -\sqrt{3}\pi + 2 = f(\pi).$$

Quindi il punto di massimo assoluto è $x = 0$ e il punto di minimo assoluto è $x = \pi$.

Esercizio 5

L'affermazione A) è vera, in quanto da $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$ si ricava subito per l'algebra dei limiti che $a_n^2\sqrt{b_n} \to 0^+$.

L'affermazione B) è falsa, basta prendere $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$, da cui si ricava che $a_n/b_n = n \to +\infty$.

L'affermazione C) è falsa, basta prendere $a_n = 1/n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui si ricava che $b_n/a_n = n \to +\infty$.

L'affermazione D) è vera, in quanto da $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$ si ricava subito per l'algebra dei limiti che $(a_nb_n)^n \to 0^+$ e quindi $1/(a_nb_n)^n \to +\infty$.