PRECORSO DI MATEMATICA 2014/15
Esercitazione finale
Facoltà di Ingegneria Civile ed Industriale
Università di Roma La Sapienza
a cura di Cigliola, de Bonis, Di Costanzo, Felici, Meleleo

ESERCIZIO 1. Siano p e q proposizioni. Dimostrare che l'espressione $\overline{\overline{p} \vee q} \wedge q$ è una contraddizione e provare che $p \Rightarrow q$ e $q \vee \overline{p}$ sono equivalenti.

ESERCIZIO 2. Siano dati i seguenti insiemi $A = \{\, a,\ b,\ 0,\ 2,\ 1,\ *\,\}$, $B = \{\, a,\ c,\ *,\ 1\,\}$, $C = \{\, b,\ c,\ 0,\ 3\,\}$ e $D = \emptyset$. Calcolare:

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. $[(A \cap B) \cap (C \cup D)] \setminus (A \cup B)$
3. $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D)$

ESERCIZIO 3. Si dimostri per induzione che per ogni $n \geqslant 1$ si ha che

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

ESERCIZIO 4. Sia data l'equazione

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0.$$

1. Dire di che conica si tratta e darne una descrizione completa.
2. Dato il fascio di rette pasanti per il punto $(0, 1)$, dire quali rette di tale fascio sono tangenti, quali secanti e quali esterne alla conica data.
3. Per le rette tangenti trovate nel punto precedente, determinare i loro punti di tangenza con la conica e la loro distanza dall'origine del piano cartesiano e dal punto P di coordinate $(4, 3)$.

ESERCIZIO 5. Siano dati il punto $P = (x_0, y_0)$ e la retta $r : ax+by+c = 0$. Si dimostri la formula della distanza punto-retta

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

seguendo i passi indicati qui di seguito.

1. Dimostrare la formula nel caso in cui r sia orizzontale o verticale.

2. Negli altri casi, scrivere l'equazione della retta passante per P perpendicolare alla retta r. Si chiami questa retta s.
3. Calcolare l'intersezione Q tra r ed s (tenendo presente che le coordinate di Q dipenderanno da x_0, y_0, a, b, c).
4. Calcolare la distanza tra P e Q.

ESERCIZIO 6. Risolvere la seguente equazione contenente esponenziali:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{8x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x^3+4x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3x^3}.$$

ESERCIZIO 7. Risolvere la seguente equazione contenente logaritmi:

$$\sqrt{2 - \log_{\frac{2}{3}}(x^2+1)} = -\log_{\frac{2}{3}}(x^2+1).$$

ESERCIZIO 8. Risolvere la seguente disequazione contenente esponenziali:

$$\frac{e^{x^2-2x+\frac{3}{2}} - \sqrt{e}}{e^{2x^2}-1} \leq 0.$$

ESERCIZIO 9. Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{|x-4| - 7x}{x(x+3)} - 3 < 0.$$

ESERCIZIO 10. Risolvere la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{3x-3}.$$

ESERCIZIO 11. Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{-2x}{x^2-5x+6} + 1 \leq 0 \\ x(x+2) + 1 \geq 0 \\ \frac{x^2-9x+14}{x^2+3x} < 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 12. Verificare le seguenti identità:

1. $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\Big);$
2. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta;$

3. $1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

ESERCIZIO 13. Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche:

1. $2\operatorname{sen}^2\mathrm{x} + 3\operatorname{sen}\mathrm{x}\cos\mathrm{x} - \cos^2\mathrm{x} \leq 2$;

2. $\dfrac{3\operatorname{sen}\mathrm{x} + \sqrt{3}\,\cos\mathrm{x} + \sqrt{3}}{\cos 2x + \operatorname{sen}\mathrm{x} - 1} \geq 0$.

ESERCIZIO 14. L'obiettivo di questo esercizio guidato è calcolare $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$.

1. Dimostrare l'identità

$$\operatorname{sen}(5\alpha) = 5\operatorname{sen}\alpha - 20\operatorname{sen}^3\alpha + 16\operatorname{sen}^5\alpha.$$

   Suggerimento: sviluppare $\operatorname{sen}(4\alpha + \alpha)$ usando le formule di addizione e di duplicazione, poi ridurre il tutto alla sola funzione seno mediante la relazione fondamentale.

2. Scrivere l'identità per $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$ e risolvere l'equazione ottenuta ponendo $x = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$.

3. Determinare quale soluzione dell'equazione corrisponde a $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$.
   $\left(\text{Osservare che } \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5} < \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\right)$