D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

Appello del 4.6.2019: Compito A

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di minorante per un insieme $A \subset \mathbb{R}$

(ii) Dare la definizione di estremo inferiore per un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e fare un esempio di insieme che ammette estremo inferiore, ma non minimo.

Risposta

CORREZIONE

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione e fare un esempio di successione monotona decrescente.

(ii) Enunciare il teorema sulla convergenza delle successioni monotone.

Risposta

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che f(0) = 0, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Allora

- [a] f é monotona non decrescente in $(-\infty, 0]$
- [b] Per ogni $y > 0$ esiste $x < 0$ tale che $f(x) = y$
- [X] Per ogni $y < 0$ esiste $x < 0$ tale che $f(x) = y$
- [d] La funzione f non può essere continua in 0.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema dei valori intermedi, $f((-\infty,0]) = (-\infty,0]$ poiché $f(0)=0$ e $\inf_{(-\infty,0)} f = -\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f(x) = e^x \sin(x)$. Allora si ha $f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) = 0$ per

- [a] $\alpha = 2, \beta = 2$
- [b] $\alpha = 2, \beta = -2$
- [X] $\alpha = -2, \beta = 2$
- [d] $\alpha = 0, \beta = 0.$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$, $f''(x) = 2e^x \cos(x)$

$2e^x \cos(x) + \alpha e^x \sin(x) + \alpha e^x \cos(x) + \beta e^x \sin(x) = 0 \iff$

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

[3 punti]

La retta $y = -2x + 3$ nel punto $x_0 = 1$ risulta tangente al grafico della funzione

- [a] $f(x) = e^{x^2-1}$
- [X] $f(x) = e^{1-x^2}$
- [c] $e^{\frac{1}{x}-1}$
- [d] $e^{-\frac{1}{x}+1}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

1ª condizione: $f(1) = 1$ (verificata da tutti)

2ª condizione: $f'(1) = -2 \implies$ (b)

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{\pi x^2}$$

Risoluzione

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \theta(x^2), \quad \sin(x) = x + \theta(x^2), \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \theta(x^2)$$

$$e^x - \sin(x) - \cos(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + \theta(x^2) =$$

$$= x^2 + \theta(x^2) \sim x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{\pi x^2} = \frac{1}{\pi}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int e^x(1+e^x)\ln(1+e^x)dx$$

Risoluzione

$$e^x + 1 = t \qquad e^x dx = dt$$

$$\int e^x(1+e^x)\ln(1+e^x)dx = \int t \ln(t)\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln(t) - \int \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \frac{t^2\ln(t)}{2} - \frac{t^2}{4} + c =$$

$$= \frac{(e^x+1)^2\ln(e^x+1)}{2} - \frac{(e^x+1)^2}{4} + c$$

Esercizio 6

[4 punti]

Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$.

Risoluzione

- $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } x > 3\} = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
- $f(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 1 \iff x = 1 + \sqrt{1+4}$

  $f(x) > 0$ in $(-\infty, 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}, +\infty)$

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2 - 2x - 3}$ non si annulla in $\mathcal{D}(f)$

$f'(x) < 0$ per $x < -1$, $f(x) > 0$ per $x > 3$