D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 4.7.2014: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivate parziali per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ii) Calcolare le derivate parziali di $f(x, y) = \ln(xy^2)$

Risposta

(i)

(ii) $f_x(x,y) = \frac{1}{xy^2} \cdot y^2$

$f_y(x,y) = \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Scrivere la matrice Jacobiana della trasformazione in coordinate polari

(ii) Enunciare il Teorema sul cambiamento di variabili per gli integrali doppi

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

$e^{-25\pi i} =$

- [x] a -1
- [ ] b $-i$;
- [ ] c i ;
- [ ] d 1.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$e^{-25\pi i} = e^{-24\pi i - \pi i} \underset{\text{PERIODICITÀ}}{=} e^{-\pi i} = -1$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia f continua in $\mathbb{R}$, allora

- [ ] a f é superiormente limitata in $\mathbb{R}$;
- [x] b f é limitata in $(0, 1)$;
- [ ] c $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$;
- [ ] d $f(x)^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poichè f è continua in $\mathbb{R}$, dal teo. di Weierstrass ammette max. e min. in $[0,1]$ e quindi è limitata in $(0,1) \subseteq [0,1]$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato tale che $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ per cui $x > 3 - \epsilon$. Allora

- [ ] a $3 \in A$;
- [ ] b $A \cap (2, 4)$ é non vuoto;
- [x] c $\sup A \geq 3$;
- [ ] d 3 é un minorante di A.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poichè $\sup A \geq x\ \forall x \in A$, allora $\forall \varepsilon > 0$, $\sup A > 3 - \varepsilon$, quindi $\sup A \geq 3$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{e^{-y(t)}}{1-t} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili $y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$ con $\begin{cases} f(t) = \frac{1}{1-t} \\ g(y) = e^{-y} \end{cases}$

1) Sol stazionaria: $e^{-y} = 0$ mai

2) $\displaystyle\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{g(r)}\,dr = \int_0^t f(r)\,dr \iff \int_\alpha^{y(t)} e^r\,dr = \int_0^t \frac{1}{1-r}\,dr \iff$

$\left[e^r\right]_\alpha^{y(t)} = \left[-\ln|1-r|\right]_0^t \iff e^{y(t)} = e^\alpha + \ln\left|\frac{1}{1-t}\right|$

$y(t) = \ln\left(e^\alpha + \ln\left|\frac{1}{1-t}\right|\right)$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{\ln(1-2x)} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Risoluzione

$\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0 \Rightarrow \ln(1-2x) \sim -2x$ per $x \to 0$

$1 - e^t \sim -t$ per $t \to 0 \Rightarrow 1 - e^{x^2} \sim -x^2$ per $x \to 0$

quindi $\dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1-2x)} \sim \dfrac{-x^2}{-2x} = \dfrac{x}{2} \longrightarrow 0$ per $x \to 0$

$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x$, quindi

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{\ln(1-2x)} = 0$ (funzione infinitesima per funzione limitata)

Esercizio 6

[4 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 5x^3 - 75y^5 + 3xy$ e classificarli.

Risoluzione

$$Df(x,y) = \left(15x^2 + 3y,\ -375y^4 + 3x\right) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2 + 3y = 0 \\ -375y^4 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot (125)^2 y^8 + y = 0 \\ x = 125y^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(5 \cdot (125)^2 y^7 + 1\right) \cdot y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt[7]{-\frac{1}{5 \cdot 125^2}} = \sqrt[7]{-\frac{1}{5^7}} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$P_0 = (0,0)$

$P_1 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 30x & 3 \\ 3 & -1500y^3 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$ Punto di sella

$$Hf\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \det Hf\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) > 0 \end{cases}$$ Punto di minimo