D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 11.6.2014: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di integrabilità in senso improprio per $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

ii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é integrabile in senso improprio in $(0, \infty)$

Risposta

(i) ____

(ii) Poiché $f(x) = 1/x^\alpha$ non è integrabile in $(0,1]$ per $\alpha \geq 1$ e non è integrabile in $[1,+\infty)$ per $\alpha \leq 1$, allora f non è integrabile in $(0,+\infty)$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di massimo e minimo locale per una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Risposta

(i) ____

(ii) ____

Esercizio 1

[3 punti]

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $a_n = e^{-b_n} + b_n^2$. Allora

[a] $a_n \geq b_n$ definitivamente

[b] a_n é limitata inferiormente;

[c] a_n é limitata superiormente;

[d] $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ~~converge.~~

Risoluzione (giustificare la risposta)

a_n è limitata inferiormente poiché $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

essendo $e^{-b_n} > 0$ e $b_n^2 \geq 0 \ \forall n$

Esercizio 2

[3 punti]

Se $\lim_{x\to1} f(x) = 0$, $\lim_{x\to1} f(x)g(x) = 2$, allora $\lim_{x\to1} \frac{1}{g(x)}$

[a] esiste finito

[b] esiste infinito

[c] non esiste

[d] non si può concludere nulla

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{x\to1} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to1} f(x) \cdot \frac{1}{f(x)\cdot g(x)} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Esercizio 3

[3 punti]

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é una funzione regolare tale che $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, allora

[a] x_0 é un massimo locale di f;

[b] x_0 é un minimo locale di f;

[c] x_0 é un un punto di flesso di f;

[d] non si può concludere nulla.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti

[a] e [b] : $f(x) = x^5$ ha un flesso in $x=0$

[c] : $f(x) = x^4$ ha un minimo in $x_0 = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)cos(2x) - x}{x\ln(1+x^2)}$$

(disegnare il dominio)

Risoluzione

$x \cdot \ln(1+x^2) \sim x \cdot x^2 = x^3$ per $x \to 0$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)$, $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x^2)^2}{2} + \theta(x^3) = 1 - 2x^2 + \theta(x^3)$

$\sin(x)\cdot\cos(2x) - x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)\right)\left(1 - 2x^2 + \theta(x^3)\right) - x =$

$= x - \frac{x^3}{6} - 2x^3 - x + \theta(x^3) \sim -\frac{13}{6}x^3$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(2x) - x}{x\ln(1+x^2)} = -\frac{13}{6}$$

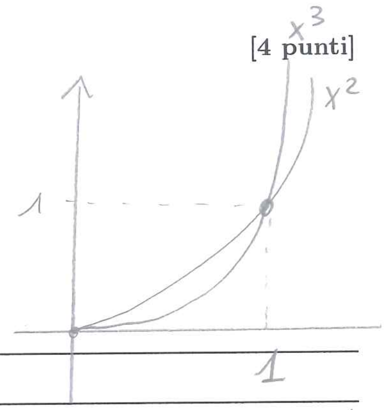
Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$$

ove $D = \{(x,y) : 0 \le x^3 \le y \le x^2\}$.



Risoluzione

$D = \{(x,y) : x \in [0,1],\ x^3 \le y \le x^2\}$

$\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\, dy dx = \int_0^1 \sqrt{x}\ \frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^3}^{x^2} dx =$

$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^{\frac{7}{2}} - x^5\right) dx = \left[\frac{4}{27}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{9}x^6\right]_0^1 =$

$= \frac{4}{27} - \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

Esercizio 6 [4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{2x} - e^x - 2$.

Risoluzione

- $D(f) = \mathbb{R}$

- Intersezione con gli assi

• $f(0) = -2$

• $f(x) = 0 \overset{t=e^x}{\iff} t^2 - t - 2 = 0 \iff t = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} e^x = 2 \iff \boxed{x = \ln(2)} \\ e^x = -1 \quad \text{impossibile} \end{cases}$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ (asintoto orizzontale)

- Derivata

$f'(x) = 2e^{2x} - e^x = 2e^x\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

$f'(x) = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

inoltre $f'(x) > 0$ per $x > -\ln(2)$
$f'(x) < 0$ per $x < -\ln(2)$