Appello del 28.6.2017: Compito A

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

ii) Fare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile, ma non differenziabile.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli Zeri

(ii) Mostrare che la funzione $f(x) = 6x^5 - 3x^3 + 4x - 2$ ha uno zero in $[0, 1]$

Risoluzione

(i)

(ii)

$f(0) = -2$

$f(1) = 5$

Inoltre f è continua in $[0,1]$, quindi dal Teorema degli zeri esiste uno zero di f in $[0,1]$

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $a_n = 2^n - n^{500} + \sin(\frac{n\pi}{2})$ é

- [a] indeterminata;
- [b] convergente;
- [c] divergente a $+\infty$; ☒
- [d] divergente a $-\infty$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$a_n = 2^n\left(1 - \frac{n^{500}}{2^n} + \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{2^n}\right)$ e quindi

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (dalla gerarchia degli infiniti)

Esercizio 2

[3 punti]

L'integrale in senso improprio $\int_1^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{t})dt$

- [a] é finito e non positivo;
- [b] non esiste;
- [c] é finito e non negativo ; ☒
- [d] nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$1-\cos(1/t) \geq 0$, $\forall t \in [1,+\infty)$; inoltre $1-\cos\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to +\infty$ e quindi è integrabile in senso improprio

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^6 - 27i = 0$. Allora $|z|$ vale

- [a] 9
- [b] 27
- [c] 3
- [d] $\sqrt{3}$ ☒

Risoluzione (giustificare la risposta)

$27i = 27\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, quindi $|27i| = 27$. Le radici seste di $27i$ hanno modulo

$\rho = (27)^{1/6} = (3^3)^{1/6} = \sqrt{3}$

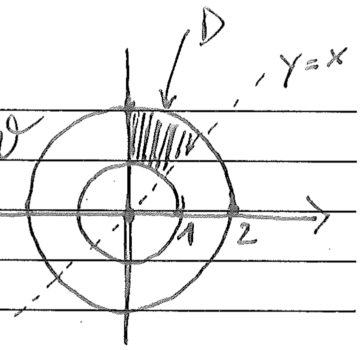
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y\}$ e calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy$$

Risoluzione



$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \frac{\rho^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)}{\rho^2}\,d\rho\, d\vartheta$$

$$= \int_1^2 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= \left[\frac{\sin^2(\vartheta)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \ln(1-x)\cdot(\cos(x)-1)$.

Risoluzione

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$. Ponendo $t = -x$, si ha

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $\mathbb{R}$

Zeri: $x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

Segno: $f(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
$f(x) < 0$ se $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

Derivata: $f(x) = e^{-x}(x^2-3)$, quindi

$f'(x) = -e^{-x}(x^2-3) + e^{-x}(2x) = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$f'(x) > 0$ se $x \in (-1, 3)$, $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

da cui $x_0 = -1$ punto di minimo locale
$x_1 = 3$ punto di massimo locale