Appello del 2.9.2016: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

ii) Fare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile, ma non differenziabile.

Risposta

(i)

(ii) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è derivabile in (0,0), ma non differenziabile in (0,0)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli Zeri

(ii) Mostrare che la funzione $f(x) = x^2 - \arctan(x) - 2$ ha uno zero positivo

Risoluzione

(i)

(ii) $$\left.\begin{cases} f(0) = -2 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ f \text{ continua} \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ ha uno zero in } (0,+\infty)$$

Esercizio 1

[3 punti]

La funzione $f(x) = x - \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

- ~~a~~ f é strettamente crescente;
- b f ha infiniti punti di massimo relativo;
- c f é periodica;
- d $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, inoltre $f'(x) = 0$ se $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
e $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Esercizio 2

[3 punti]

Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sono tali che $z_1 + z_2 = 3$, allora

- a $z_1 = \overline{z_2}$;
- b z_1, z_2 sono numeri reali;
- c $|z_1| + |z_2| = 3$;
- ~~d~~ $Im(z_1) = -Im_(z_2)$ (Im: parte immaginaria).

Risoluzione (giustificare la risposta)

$z_1 = a_1 + i b_1$, $z_2 = a_2 + i b_2$, quindi $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = 3$
se $a_1 + a_2 = 3$ e $b_1 = -b_2$, cioè $\Im m(z_1) = -\Im m(z_2)$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione divergente a $+\infty$. Allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che

- a $a_{100} < -n$
- b $a_n < -100$
- ~~c~~ $a_n > 100$
- d $a_{100} > n$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per def. di $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n_0$ t.c. $\forall n > n_0$,
$a_n > M$, quindi per $M = 100$, esiste n_0 t.c. $\forall n > n_0$,
$a_n > 100$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale $\int_0^{\pi/4} 3x\sin(2x)dx$.

Risoluzione

$t = 2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3x \sin(2x)dx = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t)dt = \frac{3}{2}\Big[\sin(t) - t\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \ln(1-x)\cdot(e^{x^2}-1)$.

Risoluzione

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots \implies \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$e^t = 1+t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots \implies e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots$$

$$f(x) = \left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = -x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x-2}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $x \neq 2$, $\frac{x^2-3}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \mathcal{D}_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup (2, +\infty)$

Segno: $f \geq 0$, $f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

Limiti: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Derivata

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3}{x-2}}} \cdot \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \qquad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (2, +\infty)$$

$f'(x) = 0 \iff x = 3$ e $x = 1$ (entrambe i punti sono contenuti nel dominio di f)

$f'(x) > 0$ se $x \in (-\sqrt{3}, 1) \cup (3, +\infty)$

$f'(x) < 0$ se $x \in (1, \sqrt{3}) \cup (2, 3)$

$x = 1$ punto di massimo locale ($f(1) = \sqrt{2}$)

$x = 3$ punto di minimo locale ($f(3) = \sqrt{6}$)

$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} f'(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \sqrt{3}^-} f'(x) = -\infty$