Appello del 4.9.2017: Compito A

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di integrabilità secondo Riemann per una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

ii) Se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ assume solo un numero finito di valori, allora é sempre integrabile secondo Riemann?

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il teorema di Weierstrass

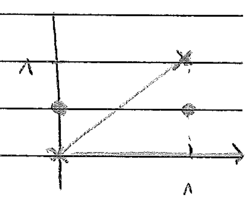
(ii) Mostrare con un controesempio che il teorema di Weierstrass non vale in un intervallo aperto.

Risoluzione

(i)

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 0 \text{ e } x = 1 \end{cases}$$



Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\sup A = \ell$;
- [b] $\inf A < \ell$;
- [c] si ha sempre $\sup A = +\infty$;
- [☒ d] A é limitato.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti una successione convergente è sempre limitata

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ tale che $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$. Allora

- [a] f é dispari
- [b] f é pari
- [☒ c] l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione
- [d] $\int_0^2 f(x)dx = -\int_{-2}^0 f(x)dx$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal Teorema della media, $\exists\, c \in [-2,2]$ t.c.

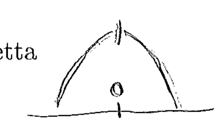
$0 = \int_{-2}^{2} f(x)dx = f(c)\cdot 4$, quindi $\exists\, c$ t.c. $f(c) = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\exists \delta > 0$ per cui $x \cdot f'(x) < 0$ per $0 < |x| < \delta$. Allora f ha in 0 un punto di

- [☒ a] massimo relativo
- [b] minimo relativo
- [c] crescenza stretta
- [d] decrescenza stretta



Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $x \cdot f'(x) < 0 \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < 0 \\ f'(x) < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

allora f ha in $x = 0$ un punto di massimo locale

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Risoluzione

Applicando il criterio del confronto asintotico

$e^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ per $n \to \infty$

allora $(e^{\frac{1}{n}}-1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$ e la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ è convergente, quindi anche la serie data è convergente

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di $f(x,y) = 2x^6 + 3y^4 + 12xy$ e classificarli.

Risoluzione

$Df(x,y) = (12x^5 + 12y,\ 12y^3 + 12x)$

$\begin{cases} 12x^5 + 12y = 0 \\ 12y^3 + 12x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x^5 \\ -12x^{15} + 12x = 0 \end{cases} \iff x(x^{14}-1) = 0$ $\begin{matrix} x=0 \\ x=\pm 1 \end{matrix}$

Punti critici $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,-1)$, $P_3 = (-1,1)$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 60x^4 & 12 \\ 12 & 36y^2 \end{bmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Punto di sella

$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 60 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Punto di minimo locale

$Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} 60 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Punto di minimo locale

Esercizio 6

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 2te^{t^2+y(t)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Riscriviamo l'equazione nella forma

$y'(t) = 2t\, e^{t^2} \cdot e^{y(t)}$

Equazione a variabili separabili

con $g(y) = e^y$, $h(t) = 2t\,e^{t^2}$

Poichè $g \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C^0(\mathbb{R})$, esiste sempre una sol. locale del problema

- $g(\alpha) = e^{\alpha}$ non si annulla mai, quindi non ci sono sol. stazionarie

- Separazione delle variabili

$$\int_{\alpha}^{y(t)} \frac{1}{e^r}\, dr = \int_0^t 2s e^{s^2}\, ds$$

$$\left[-e^{-r}\right]_{\alpha}^{y(t)} = \left[e^{s^2}\right]_0^t \iff e^{-\alpha} - e^{-y(t)} = e^{t^2} - 1$$

$$\Rightarrow e^{-y(t)} = e^{-\alpha} - e^{t^2} + 1 \iff \boxed{y(t) = -\ln\left(e^{-\alpha} - e^{t^2} + 1\right)}$$