D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 6.7.2016: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivate parziali per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ii) Calcolare le derivate parziali di $f(x, y) = e^{xy^2+x}$

Risposta

(i)

(ii) $f_x(x,y) = e^{xy^2+x} \cdot (y^2+1)$

$f_y(x,y) = e^{xy^2+x} \cdot 2xy$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di dominio y-semplice

(ii) Enunciare il Teorema di Fubini-Tonelli

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é invertibile, allora

$\boxed{\text{a}}$ f é continua; $\boxed{\text{b}}$ f é limitata;

$\boxed{\text{c}}$ f é strettamente crescente; $\cancel{\boxed{\text{d}}}$ $f(1) \neq f(-1)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Se f è invertibile, allora f è iniettiva quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$ se $x_1 \neq x_2$

Esercizio 2

[3 punti]

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, allora la formula $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$,

$\cancel{\boxed{\text{a}}}$ é vera per ogni $m, n \in \mathbb{N}$; $\boxed{\text{b}}$ é vera solo se $m = n$;

$\boxed{\text{c}}$ non é mai vera; $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

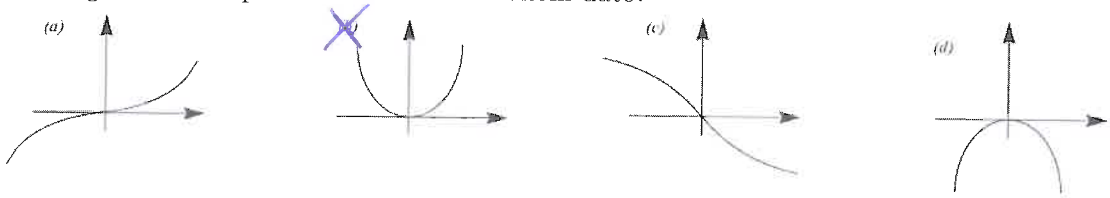
Per sostituzione $t = 1-x$, allora $\int_0^1 x^n(1-x^m)dx = \int_0^1 (1-t)^n t^m dt =$

$= \int_0^1 (1-x)^n x^m dx$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia f una funzione regolare tale che $f(0) = 0$, $f'(x) = x\cos^4(f(x))$ per $|x| < \delta$ per qualche $\delta > 0$. Quale dei seguenti é compatibile con le informazioni date?



Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $f'(x) = x \cdot \cos^4(f(x))$ e $\cos^4(f(x)) \geq 0$ $\forall x$, allora $f'(x) \leq 0$ se $x \leq 0$, $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$, quindi f decrescente in $(-\infty, 0)$, crescente in $(0, +\infty)$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^3 \cdot \ln(t) \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $g(y)=y^3$, $f(t)=\ln(t)$
quindi poiché $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0((0,+\infty))$, $\exists!$ sol. (locale)

- Sol. stazionarie

$g(\alpha)=0 \iff \alpha^3=0 \iff \alpha=0$; se $\alpha=0$, $y(t)=0$ è sol. staz.

- Separazione variabili

$$\int_{\alpha}^{y(t)} \frac{1}{r^3}\,dr = \int_1^t \ln(s)\,ds \iff \left[-\frac{1}{2r^2}\right]_{\alpha}^{y(t)} = \Big[s\ln(s) - s\Big]_1^t$$

$$y(t)^2 = \frac{\alpha^2}{\cancel{\alpha}\,1 - 2\alpha^2(t\ln(t) - t + 1)}$$

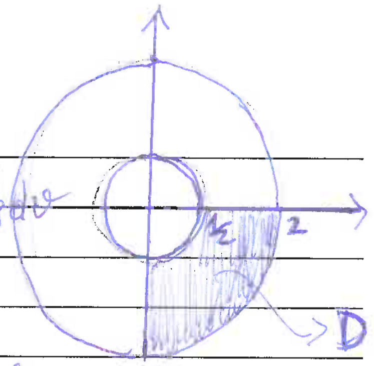
Esercizio 5

[4 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$ e calcolare

$$\iint_D \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$$

Risoluzione



$$\iint_D \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{\left(\rho^2\cos^2(\vartheta) + \rho\sin\vartheta\right)}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \rho^2\,d\rho \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos^2(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \rho\,d\rho \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\frac{\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + \vartheta}{2}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} + \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \Big[-\cos(\vartheta)\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x} + \beta & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \alpha x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

é derivabile in $\mathbb{R}$?

Risoluzione

Continuità (è sufficiente studiare la continuità in $x=0$)

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{x^2}-1}{x} + \beta = \beta \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{2} + \alpha x + 1\right) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\beta = 1}$$

Derivabilità

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} \cdot 2x^2 - e^{x^2} + 1}{x^2} & x < 0 \\ x + \alpha & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \alpha \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$