D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 19.9.2019: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di funzione crescente.

(ii) Fare un esempio di funzione derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$ che non verifica $f'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = x^3$ (infatti f è strettamente crescente e $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x=0$)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema de l'Hospital (con le ipotesi appropriate)

(ii) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}$.

Risoluzione

(i)

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$

(avendo applicato il Teo. fondamentale del calcolo integrale)

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $|a_n| \sim \sin(1/n^2)$ per $n \to \infty$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- $\boxed{\times}$ converge assolutamente;
- $\boxed{b}$ diverge;
- $\boxed{c}$ é irregolare;
- $\boxed{d}$ converge, ma non converge assolutamente.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $|a_n| \sim \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolut.

Esercizio 2 **[3 punti]**

Tra gli infiniti, per $x \to \infty$, $f(x) = e^x x^\pi$, $g(x) = e^{3x}\ln(x)$ e $h(x) = e^{\sqrt{x}} x^5$, quelli di ordine superiore e inferiore sono

- $\boxed{a}$ f, g;
- $\boxed{b}$ f, h;
- $\boxed{c}$ h, g;
- $\boxed{\times}$ g, h.

Risoluzione (giustificare la risposta)

È sufficiente guardare i Termini esponenziali e ordinarli in base all'esponente

Esercizio 3 **[3 punti]**

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua, allora

- $\boxed{a}$ f ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}$
- $\boxed{\times}$ Se f é invertibile, allora f^{-1} é continua
- $\boxed{c}$ $\frac{1}{f}$ é continua
- $\boxed{d}$ f é derivabile

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per il teorema di continuità della funzione inversa

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)^2}{t^2-1} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $g(y) = y^2$, $f(t) = \frac{1}{t^2-1}$

Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$

Per $\alpha = 0$, $y(t) \equiv 0 \ \forall t \in (-1,1)$ è sol stazionaria

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2}\,dr = \int_0^t \frac{1}{r^2-1}\,dr \iff \left[-\frac{1}{r}\right]_\alpha^{y(t)} = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-r}{1+r}\right|\right]_0^t$$

$$\iff y(t) = \frac{2\alpha}{\alpha \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + 2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

Risoluzione

$$e^x - \cos(x) - \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) - \left(x + o(x^2)\right)$$

$$e^{x^2} - e^{x^3} = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots\right) - \left(1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \dots\right) = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

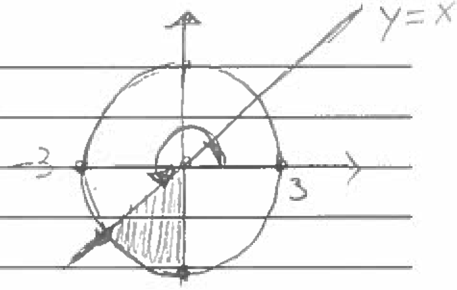
Esercizio 6 **[5 punti]**

Calcolare

$$\int\int_D 2xy\,dx\,dy$$

ove $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 9,\ y \le x,\ x \le 0\}$.

Risoluzione



$$\iint_D 2xy\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^3 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} 2\rho^3 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,d\vartheta\,d\rho$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \left[\sin^2(\vartheta)\right]_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{3^4}{4}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$$

OSS

$$\int 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) = \sin^2(\vartheta)$$