D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 8.2.2019: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di minimo locale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Risposta

(i) ______

(ii) ______

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

(ii) Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é una funzione limitata, allora é integrabile?

Risoluzione

(i) ______

(ii) ______

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $\sqrt{|a_n|} \sim \frac{1}{2^n}$ per $n \to \infty$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

[X] a converge assolutamente;

[b] diverge;

[c] é irregolare;

[d] converge, ma non converge assolutamente.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $\sqrt{|a_n|} \sim 1/2^n \Rightarrow |a_n| \sim \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ e la serie $\sum_n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ è una serie geometrica convergente

Esercizio 2

[3 punti]

L'integrale $\int_0^1 e^{3x}(2x+1)dx$ vale

[a] $\frac{1}{9}(7e^3+1)$;

[X] b $\frac{1}{9}(7e^3-1)$;

[c] $\frac{1}{6}(2e^3-1)$;

[d] $\frac{1}{6}(7e^3-1)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\int_0^1 e^{3x}(2x+1)\,dx = \left[\frac{1}{9}e^{3x}(6x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{9}(7e^3-1)$$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $y(t) = C_1e^t + C_2e^{4t}$ é l'integrale generale dell'equazione

[a] $y''(t) - 5y'(t) - 4y(t) = 0$

[X] b $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 0$

[c] $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 0$

[d] $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$ sono radici del pol. caratteristico, $(\lambda-1)(\lambda-4) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ è il pol. caratteristico, quindi l'equazione diff. ordinaria è

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n+1}$$

Risoluzione

Applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^n\left(1+\frac{1}{n^n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{\sqrt[n]{n}}}}{\underset{n^{1/2}}{\cancel{n}}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^n}}} = 0$$

e quindi la serie converge

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^3(e^x - e^{-x})}$$

Risoluzione

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) = 2x + o(x)$$

Quindi $x^3(e^x - e^{-x}) \sim 2x^4$

$$\sin^2(x) - x^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 - x^2 = x^2 - \frac{2x^4}{6} + o(x^4) - x^2 \sim -\frac{x^4}{3}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^3(e^x - e^{-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3}}{2x^4} = -\frac{1}{6}$$

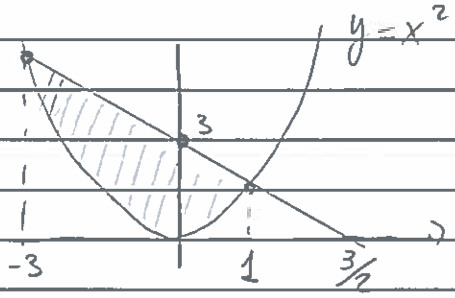
Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare $\iint_D xy\,dxdy$ ove D é la region piana compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = -2x + 3$.

Risoluzione

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x+3 \end{cases} \iff D$$



$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = \{(x,y) : x \in [-3,1],\ x^2 \le y \le -2x+3\}$$

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_{-3}^{1}\int_{x^2}^{-2x+3} xy\,dy\,dx = \int_{-3}^{1}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{-2x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{1}\left(x(-2x+3)^2 - x^5\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{1}\left(4x^3 - 12x^2 + 9x - x^5\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4 - 4x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^6}{6}\right]_{-3}^{1} = -\frac{160}{3}$$