Appello del 7.6.2012: **Compito B**

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}$, non vuoto,

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione di un insieme D.

(ii) Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

(iii) Fare un esempio di una funzione f tale che $\lim_{x\to -1} f(x)$ non esiste.

Risposta

(i)

(ii)

(iii) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ +1 & x > 1 \end{cases}$

Domanda 2

[2+2 punti]

(i) Dare la definizione di successione monotona

(ii) Enunciare il teorema sul limite delle successioni monotone.

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Allora

- [a] $\lim_{x\to-\infty} f(\cos(x)) = 1$
- [b] $\lim_{x\to-\infty} \cos(f(x)) = 1$
- [c] $f \sim e^{-x}$ per $x \to -\infty$;
- [d] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema del limite della funzione composta, poichè $\lim_{y\to 0} \cos(y) = 1$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n}{1+a_n}$

- [a] converge semplicemente, ma non assolutamente
- [b] diverge
- [c] oscilla
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti la serie converge assolutamente poichè

$\left|(-1)^n \frac{a_n}{1+a_n}\right| = \frac{a_n}{1+a_n} < a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suriettiva, allora f é

- [a] continua e non limitata superiormente
- [b] strettamente crescente
- [c] non limitata
- [d] continua e non limitata inferiormente

Risoluzione (giustificare la risposta)

f è non limitata poichè $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e quindi $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\beta \in [-1, 1]$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2\sqrt{1 - y(t)^2} \\ y(1) = \beta \end{cases}$$

Risoluzione

1) Sol. stazionarie

$\sqrt{1-\alpha^2} = 0 \iff \alpha = \pm 1$

2) $\alpha \in (-1, 1)$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^t 3s^2\, ds \iff$$

$$\arcsin(y(t)) - \arcsin(\alpha) = t^3 - 1 \iff$$

$$\arcsin(y(t)) = \arcsin(\alpha) + t^3 - 1$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\iint_D y^2\, dx dy$$

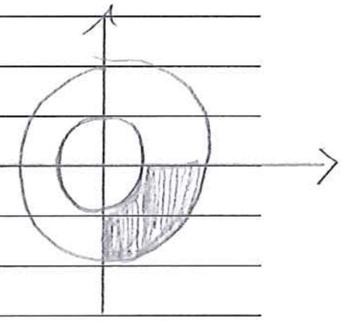
ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\, x \ge 0,\, y \le 0\}$ (disegnare il dominio D).

Risoluzione

$$\iint_D y^2\, dx dy = \int_1^2 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \rho^3 \sin^2\vartheta\, d\rho\, d\vartheta =$$

$$\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{15}{16}\pi$$



Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - x^2}{x^2 + 1}\right)$$

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \iff x - x^2 = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$ (asintoto orizz. in $\pm\infty$)

$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - x^2}{x^2 + 1}\right)} \cdot \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$

$f'(x) \begin{cases} > 0 & x \in (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}) \\ < 0 & x < -1-\sqrt{2} \text{ e } x > -1+\sqrt{2} \end{cases}$