D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 17.9.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione per un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dare la definizione di limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare la formula di Taylor con il resto di Lagrange.

(ii) Sviluppare $f(x) = e^{\sin(x)}$ al terzo ordine in $x_0 = 0$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3$

$+ o\left(\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3\right) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{3}x^3} - \cancel{\frac{1}{3}x^3} + o(x^3)$

$\Longrightarrow T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Esercizio 1

[3 punti]

L'equazione $\ln[(2x)^2] = -1$ é verificata per

- [a] $x = 0$
- [b] impossibile
- [~~c~~] $x = \pm(2\sqrt{e})^{-1}$;
- [d] $x = \pm 2\sqrt{e}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\ln[(2x)^2] = -1 \iff (2x)^2 = e^{-1} \iff x^2 = \frac{1}{4e} \iff$

$x = \pm \frac{1}{2\sqrt{e}}$

Esercizio 2

[3 punti]

Indicare quale delle seguenti equazioni differenziali ha la proprietà che tutte le sue soluzioni sono decrescenti

- [a] $y'(t) = -y(t)$
- [b] $y'(t) = e^{-y(t)}$
- [~~c~~] $y'(t) = -e^{-y(t)}$
- [d] $y'(t) = y(t)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti dall'equazione, segue che la sol. verifica necessariamente $y'(t) < 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{4^k}{2k+1}(x-3)^{3k+1} + o((x-3)^7)$. Allora:

- [~~a~~] $f'(3) = 1$
- [b] $f'''(3)$ non esiste
- [c] $f(3) = 3$
- [d] $f^{iv}(3) = 4/3$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f(x) = (x-3) + \frac{4}{3}(x-3)^4 + \frac{16}{5}(x-3)^7 + o(x-3)^7$

poiché $f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \ldots$

si ha che $f'(3) = 1$

Esercizio 4

[4 punti]

Determinare le eventuali soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = |z|^2$$

Risoluzione

In coordinate polari: $\rho^3(\cos(3\vartheta) + i\sin(3\vartheta)) = \rho^2$

da cui
$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \iff \rho = 0,\ \rho = 1 \\ 3\vartheta = 0 + 2k\pi \iff \vartheta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{6}{3}\pi \end{cases}$$
(dopo i valori si ripetono per periodicità)

quindi le sol. sono

$$\begin{cases} \rho = 0 \implies z = 0 \\ \rho = 1,\ \vartheta = \frac{2}{3}\pi \implies z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \rho = 1,\ \vartheta = \frac{4}{3}\pi \implies z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \rho = 1,\ \vartheta = 2\pi \implies z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$$

Risoluzione

$$e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2 = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2 = \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{x^4} = \frac{11}{24}$$

Esercizio 6

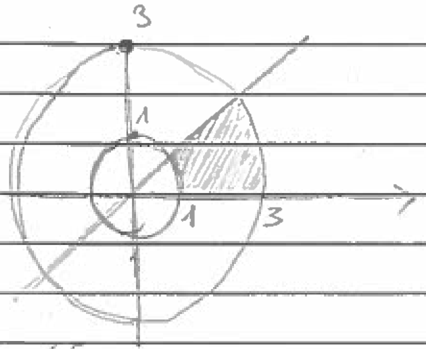
[4 punti]

Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

ove $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le y \le x\}$.

Risoluzione



$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^3 \cdot \frac{\pi}{4} = \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{4}$$