Appello del 9.11.2012: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Calcolare l'equazione del piano tangente a $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(ii)

Risposta

(i)

(ii) $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) =$

$= \ln(3) + \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 1)$

$f_x = \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot 2x \quad , f_y = \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot 2y$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Principio di induzione

(ii) Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$.

Risoluzione

(i)

(ii) Base : $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1$ vero

Passo Induttivo : Ip : $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ Tesi : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$

dim $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$. Allora $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3(x)}$

- [x] a vale 0;
- [ ] b vale 1/3!;
- [ ] c non esiste;
- [ ] d vale $+\infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Scrivendo lo sviluppo di Taylor al 3° ordine si ha $f(x) = o(x^3)$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin 3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Siano $\{a_n\}_n$una successione . Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- [ ] a diverge
- [ ] b é oscillante
- [ ] c converge
- [x] d non si può dire nulla

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) NO, per $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) NO, per $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) NO, per $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Esercizio 3 **[3 punti]**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se esiste $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$, allora

- [ ] a $f(a) = f(b)$
- [ ] b f non é iniettiva
- [ ] c f ha un minimo locale in c
- [x] d $f([a, b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right]$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché f è derivabile, f è continua quindi dal teo di Weierstrass ed il teorema dei valori intermedi segue che $f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right]$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln^8\left(1+\sqrt{2}n^{-\frac{1}{4}}\right)$$

Risoluzione

$$\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n^{1/4}}\right)\right]^8 \sim \left(\frac{\sqrt{2}}{n^{1/4}}\right)^8 = \frac{2^4}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln^8\left(1+\sqrt{2}\,n^{-\frac{1}{4}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{2^4}{n^2} = 16$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\int \frac{2x+4}{x^2+5x+4}dx$$

Risoluzione

$x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$ da cui

$$\frac{2x+4}{(x+1)(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4} \iff$$

$$2x+4 = a(x+4)+b(x+1) \iff \begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=4 \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} a = 2/3 \\ b = 4/3 \end{cases}$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+5x+4}dx = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+4} = \frac{2}{3}\lg|x+1| + \frac{4}{3}\lg|x+4| + c$$

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^3 - z|z|^2 + z = 0.$$

Risoluzione

$z^3 - z|z| + z = 0 \iff z(z^2 - |z|^2 + 1) = 0$, quindi

$$\begin{cases} z = 0 \\ z^2 - |z| + 1 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha sol. $\boxed{z=0}$

Per trovare le sol. della seconda poniamo $z = a + ib$, quindi:

$$(a+ib)^2 - (a^2+b^2) + 1 = 0 \iff a^2 - b^2 + 2abi - (a^2+b^2) + 1 = 0$$

$$\iff \begin{cases} -2b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

Quindi

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\, i, \quad z_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}}\, i$$