INGEGNERIA CIVILE - INGEGNERIA DEI TRASPORTI
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 16-07-2009 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Calcolare l'integrale $\iint_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove $\vec{F} = (-xz + yz, xz - yz, zx^2 + zy^2)$, $+\partial V$ è la superficie esterna del cono $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ed $\vec{n}$ la normale a $+\partial V$ (orientata verso l'esterno).

SOLUZIONE

Con il Teorema della Divergenza. Si ha: $\text{div}\vec{F} = -2z + x^2 + y^2$. Inoltre il cono in cordinate cilindriche è descritto dalle condizioni: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq z \leq 1 - \rho$. Allora applicando il Teorema della Divergenza, si trova:

$$\begin{aligned}\iint_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V \text{div}\vec{F} dxdydz = \iiint_V (-2z + x^2 + y^2) dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho} (-2z + \rho^2) \cdot \rho dz d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 (-\rho + 2\rho^2 - \rho^4) d\rho = -\frac{\pi}{15}.\end{aligned}$$

Calcolo diretto (in questo caso è un po' più laborioso). Siano

$$\Sigma_1 : \begin{cases} z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

rispettivamente la superficie laterale e la base del cono. Su Σ_1 la normale è:
$\vec{n}_1 = \left(-\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, -\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ e l'elemento di superficie $d\sigma = \sqrt{2} dxdy$. La normale a Σ_2 è $\vec{n}_2 = (0, 0, -1)$ ma si ha $\vec{F} \cdot \vec{n}_2|_{z=0} = -z(x^2 + y^2)|_{z=0} = 0$. Quindi il flusso sulla base è nullo mentre sulla superficie laterale si trova:

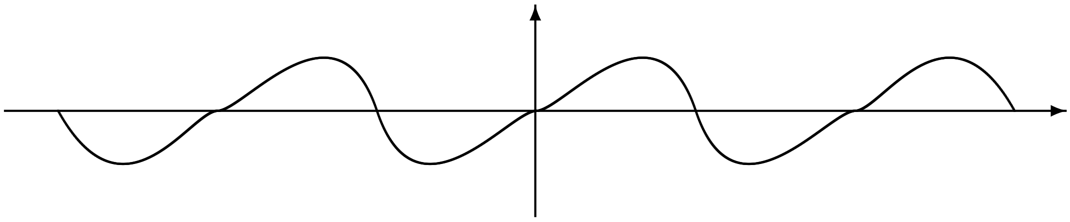
$$\begin{aligned}\iint_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{2xyz}{\sqrt{x^2 + y^2}} - z\sqrt{x^2 + y^2} + z(x^2 + y^2) \right] d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [2\rho(1 - \rho) \sin\theta \cos\theta - \rho + 2\rho^2 - \rho^3] \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 (-\rho^2 + 2\rho^3 - \rho^4) d\rho = -\frac{\pi}{15}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione $g(x) = x \sin x$, esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE

Osserviamo preliminarmente che $g(0) = g(\pi) = 0$ e quindi l'estensione periodica dispari di g, il cui grafico qualitativo è riportato sotto, è continua (e regolare a tratti). Quindi possiamo aspettarci la convergenza totale della serie.



Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Per $k=1$ troviamo

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin^2 x dx = \frac{2}{\pi}\left[x\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)dx = \frac{\pi}{2}$$

Per $k \geq 2$, applicando la formula $\sin x \sin kx = \frac{1}{2}\cos(k-1)x - \frac{1}{2}\cos(k+1)x$ si trova:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x \sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(k-1)x dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(k+1)x dx \\
=& \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(k-1)x}{k-1}\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(k-1)x}{k-1}dx - \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(k+1)x}{k+1}\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(k+1)x}{k+1}dx \\
=& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(k-1)x}{(k-1)^2}\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(k+1)x}{(k+1)^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^{k-1}-1}{\pi(k-1)^2} - \frac{(-1)^{k-1}-1}{\pi(k+1)^2} \\
=& \frac{4k}{(k^2-1)^2}\frac{(-1)^{k-1}-1}{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ dispari} \\ -\frac{8k}{\pi(k^2-1)^2} & \text{per } k \text{ pari.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\sin x + \sum_{k=2}^\infty \frac{4k}{(k^2-1)^2}\frac{(-1)^{k-1}-1}{\pi}\sin kx \equiv \frac{\pi}{2}\sin x - \sum_{m=1}^\infty \frac{16m}{\pi(4m^2-1)^2}\sin 2mx$$

per ogni $x \in [0,\pi]$ e la convergenza è totale come (già sapevamo) perché $b_{2m} \sim -\frac{1}{\pi m^3}$.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = x\sin x & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 1 & 0 < 1 < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione della corda vibrante. Usando il risultato dell'esercizio precedente e lo sviluppo dell'onda quadra di periodo 2π che vale 1 in $[0,\pi]$ e -1 in $[-\pi,0]$, si ha:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2}\cos 2t \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{(k^2-1)^2} \frac{(-1)^{k-1}-1}{\pi} \cos 2kt \sin kx$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi} \sin 2kt \sin kx$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}\cos 2t \sin x + \sum_{m=1}^{\infty} \Big[-\frac{16m}{\pi(4m^2-1)^2} \cos 4mt \sin 2mx + \frac{2}{(2m-1)^2\pi} \sin 2(2m-1)t \sin (2m-1)x \Big].$$

ESERCIZIO 4
Detta u la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(x,0) = -x^2 e^{-3x} & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 2t, u(1,t) = 2t - e^{-3} & 0 < t < 1. \end{cases}$$

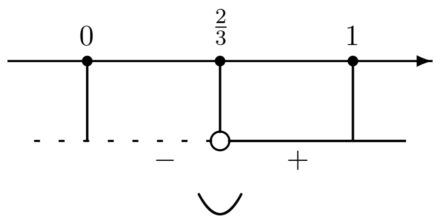
determinare il massimo e il minimo assoluto di u in $Q = [0,1] \times [0,1]$.

SOLUZIONE
Anzitutto osserviamo che i dati si raccordano:

$$-x^2 e^{-3x}\big|_{x=0} = 0 = 2t\big|_{t=0} \qquad \text{e} \qquad -x^2 e^{-3x}\big|_{x=1} = e^{-3} = \big[2t - e^{-3}\big]\big|_{t=0}$$

Inoltre $-x^2 e^{-3x}$ è C^1 in $[0,1]$ e quindi u verifica le condizioni di regolarità richieste dal principio del massimo. Allora per risolvere il problema è sufficiente calcolare massimo e minimo di u sulla frontiera parabolica, studiando le tre funzioni che formano i dati del problema.

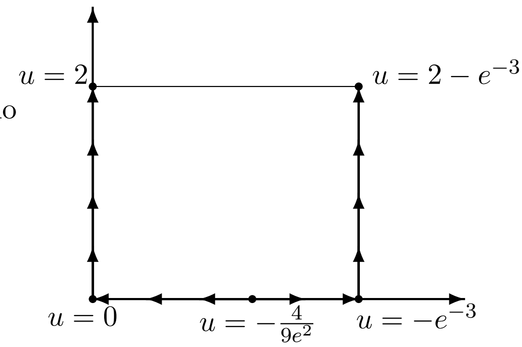
Abbiamo $\frac{d}{dx} - x^2 e^{-3x} = -x(2-3x)e^{-3x}$, per cui il segno della derivata di $-x^2 e^{-3x}$ varia in $[0,1]$ come in figura:



Essendo $-x^2 e^{-3x}\big|_{x=2/3} = -\frac{4}{9e^2}$, confrontando con i valori agli estremi già trovati deduciamo che il minimo ed il massimo di u su $[0,1] \times \{0\}$ valgono rispettivamente $\frac{4}{9e^2}$ e e^{-3}.

La funzione $2t$ è crescente in $[0,1]$ e quindi il minimo ed il massimo di u su $\{0\} \times [0,5]$ valgono rispettivamente 0 e 2. Analogamente il minimo ed il massimo di u su $\{1\} \times [0,1]$ valgono rispettivamente $-e^{-3}$ e $2 - e^{-3}$. Confrontando tutti i valori ottenuti, deduciamo che

$$\max_Q u = 2 \qquad \text{e} \qquad \min_Q u = -\frac{4}{9e^2}.$$



ESERCIZIO 5 Risolvere, al variare del parametro $a > 0$, il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g_a(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ 1 - \frac{x}{a} & \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{per } x > a. \end{cases}$$

Determinare il limite per $a \to 0^+$ della soluzione e interpretare il risultato ottenuto. Discutere poi la risoluzione del problema

$$\begin{cases} u_t + q'(u)u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g_a(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove g_a è la stessa di prima ma $q(u)$ è una generica funzione uniformemente concava, interpretando sempre il limite per $a \to 0^+$.

SOLUZIONE
Per il primo problema, le caratteristiche hanno equazione $x = x_0 - t$ per $x_0 < 0$, $x = x_0 + \left(\frac{x_0}{a} - 1\right)t$ per $0 \leq x_0 \leq a$ e $x = x_0$ per $x_0 > a$. Nella zona $-t \leq x \leq a$ la soluzione si trova risolvendo l'equazione $u = 1 - \frac{1}{a}[x + ut]$, che fornisce $u = \frac{a-x}{a+t}$. La soluzione quindi è

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < -t \\ \frac{a-x}{a+t} & -t \leq x \leq a \\ 0 & x > a. \end{cases}$$

Per $a \to 0^+$ la soluzione tende a $u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < -t \\ -\frac{x}{t} & -t \leq x \leq 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$

ritrovando quindi la soluzione del problema di Riemann $\begin{cases} u_t - uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 1 & x < 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0, \end{cases}$

ed in particolare l'onda di rarefazione $u = -\frac{x}{t}$. Per il secondo problema si ottiene la soluzione $au = a - x + q'(u)t$ in forma implicita nella zona $q'(1)t \leq x \leq a + q'(0)t$ (nelle altre zone è costante e vale $u \equiv 1$ per $x < q'(1)t$ e $u \equiv 0$ per $a + q'(0)t$). Per $a \to 0^+$ la soluzione in forma implicita diventa $0 = -x + q'(u)t$, cioè l'onda di rarefazione $u = (q')^{-1}(x/t)$ e ritroviamo ancora la soluzione del problema di Riemann.