INGEGNERIA CIVILE - INGEGNERIA DEI TRASPORTI
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 18-09-2009 - SOLUZIONI

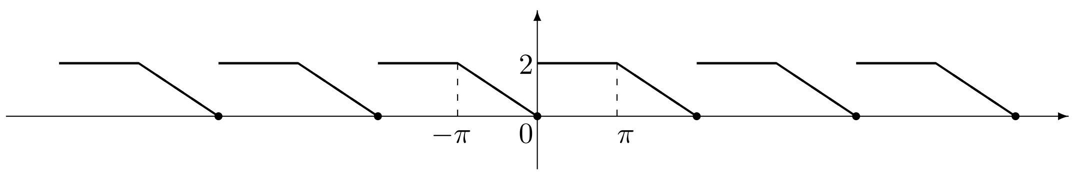
ESERCIZIO 1
Calcolare l'integrale $\iiint_\Omega (z^2+x)dxdydz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge 0\}$.
SOLUZIONE
Utilizzando le coordinate sferiche otteniamo:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (z^2+x)dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\pi/2}(\rho^2\cos^2\theta+\rho\sin\theta\cos\varphi)\rho^2\sin\theta d\theta d\rho d\varphi \\ =&2\pi\int_1^2\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}\rho^4 d\rho \\ =&\frac{2\pi}{3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 = \frac{62}{15}\pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier la funzione f di periodo 2π che in $(-\pi,\pi]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}x & \text{per } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{per } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Studiare la convergenza della serie ottenuta.
SOLUZIONE
Il grafico qualitativo è riportato sotto. La funzione è regolare a tratti ma presenta una discontinuità nei punti $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi la convergenza non sarà totale ma solo puntuale. Inoltre la funzione non è né pari né dispari.



Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)xdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{2x}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{\pi}\right]_{-\pi}^0 + 2 = 1+2 = 3.$$

Per $k \ge 1$ si trova:

$$\begin{aligned} a_k =&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{2x}{\pi}\cos kxdx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos kxdx \\ =&\frac{1}{\pi}\left[-2x\frac{\sin kx}{k\pi} - 2\frac{\cos kx}{k^2\pi}\right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi}\left[2\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi \\ =&-\frac{2}{k^2\pi^2} + \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi^2k^2} & \text{per } k \text{ dispari.}\end{cases}\end{aligned}$$

Infine, per $k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
b_k =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{2x}{\pi}\sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\sin kx dx \\
=& \frac{1}{\pi}\left[2x\frac{\cos kx}{k\pi} - 2\frac{\sin kx}{k^2\pi}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{\cos kx}{k}\right]_{0}^{\pi} \\
=& \frac{2(-1)^k}{k\pi} - \frac{2(-1)^k}{k\pi} + \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{k\pi}.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi:

$$
\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[2\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos kx + \frac{2}{k}\sin kx\right] = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \notin \{2m\pi : m \in \mathbb{Z}\} \\ 1 & \text{per } x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}, \end{cases}
$$

con convergenza puntuale.

ESERCIZIO 3

Risolvere il seguente problema di Dirichlet:

$$
\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 2xy & \text{per } x^2 + y^2 < 1 \\ u = \frac{1}{4}y^3 - \frac{3}{4}x^2 y & \text{per } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}
$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel cerchio. Osserviamo anzitutto che in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ si ha:

$$
2xy = 2r\cos\theta \cdot 2r\sin\theta = r^2 \sin 2\theta
$$

e poi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}y^3 - \frac{3}{4}x^2 y \equiv y^3 - \frac{3}{4}(x^2 + y^2)y = r^3 \sin^3\theta - \frac{3}{4}r^3 \sin\theta \\
= \frac{3}{4}r^3 \sin\theta - \frac{1}{4}r^3 \sin 3\theta - \frac{3}{4}r^3 \sin\theta = -\frac{1}{4}r^3 \sin 3\theta.
\end{aligned}
$$

Quindi il problema in coordinate polari assume la forma

$$
\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = r^2 \sin 2\theta & \text{per } 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \\ U(1,\theta) = -\frac{1}{4}\sin 3\theta & \text{per } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}
$$

La soluzione può essere cercata nella forma $U(r,\theta) = v_1(r)\sin 2\theta + v_2 \sin 3\theta$. La funzione v_1 deve risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r}v_1' - \frac{4}{r^2}v_1 = r^2 \\ v_1(1) = 0, \quad v_1 \text{ limitata.} \end{cases}
$$

Le soluzioni limitate sono $v_1(r) = C_1 r^2 + \frac{1}{12}r^4$ per cui, imponendo la condizione $v_1(1) = 0$, troviamo $C_1 = -\frac{1}{12}$. La funzione v_2 deve invece risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_2'' + \frac{1}{r}v_2' - \frac{9}{r^2}v_1 = 0 \\ v_2(1) = -\frac{1}{4}, \quad v_2 \text{ limitata.} \end{cases}$$

Le soluzioni limitate sono $v_2(r) = C_1 r^3$ per cui, imponendo la condizione $v_2(1) = -\frac{1}{4}$, troviamo $C_2 = -\frac{1}{4}$. Quindi la soluzione in coordinate polari è:

$$U(r,\theta) = \left(-\frac{1}{12}r^2 + \frac{1}{12}r^4\right)\sin 2\theta - \frac{1}{4}r^3 \sin 3\theta.$$

In coordinate cartesiane si ha invece:

$$u(x,y) = -\frac{1}{6}xy + \frac{1}{6}xy(x^2+y^2) - \frac{3}{4}y(x^2+y^2) + y^3 = -\frac{1}{6}xy + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{6}xy^3 - \frac{3}{4}yx^2 + \frac{1}{4}y^3.$$

ESERCIZIO 4
Determinare l'integrale generale dell'equazione $u_t - u_x + u = x$.
SOLUZIONE
Si tratta di una semplice equazione del primo ordine lineare a coefficienti costanti. Le caratteristiche sono le rette $x = x_0 - t$. Applicando la formula risolutiva, troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& e^{-t}\int_0^t e^s[x-(s-t)]ds + e^{-t}g(x+t) \\ =& e^{-t}\left[e^s x - se^s + e^s + te^s\right]_{s=0}^{s=t} + e^{-t}g(x+t) \\ =& x + 1 - xe^{-t} - e^{-t} - te^{-t} + g(x+t)e^{-t}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5 Sia f una funzione di classe C^1 in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sia f_1 la funzione definita in $[0,\pi]$ prolungando in modo pari f rispetto a $\frac{\pi}{2}$ e g la funzione di periodo 2π che in $(-\pi,\pi]$ coincide con il prolungamento dispari di f_1 rispetto a 0.

1) Dimostrare (anche solo graficamente) che g è di classe C^1 in $\mathbb{R}$ se e soltanto se si ha $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $f(0) = 0$.

2) Dimostrare che nello sviluppo in serie di Fourier di g tutti i coefficienti b_k con k pari sono nulli (*suggerimento*: analizzare le proprietà di simmetria di $\sin 2mx$ rispetto a $\frac{\pi}{2}$).

SOLUZIONE
1) Dato che il prolungamento rispetto a $\frac{\pi}{2}$ è pari, la funzione ottenuta sarà automaticamente continua ma sarà derivabile se e solo se $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ (la derivata è dispari rispetto a $\frac{\pi}{2}$). Essendo invece il prolungamento rispetto a 0 dispari, bisogna che sia $f(0) = 0$ per avere continuità in 0 stesso mentre la derivata sarà automaticamente continua (è pari rispetto a 0).

2) Per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $\sin 2m(\pi - x) = -\sin 2mx$ e quindi la funzione $f(x)\sin 2mx$ è dispari in $[0,\pi]$ rispetto a $\frac{\pi}{2}$.